1934 № 4

# ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

## СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

# BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

## DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ · EXEMPLE DE CITATION

И. А. Скопин. О распределении дробных частей системы целых многочленов. ИМЕН, 1934, № 4, стр. 547.

I. Skopin. Sur la distribution des parties fractionnaires d'un système de polynômes entiers. BAS-MN, 1934, № 4, p. 547 (en russe).

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Июнь 1934 г.

Непременный секретарь академик *В. Волин*

Редакционная коллегия: академик А. А. Борисяк
академик С. И. Вавилов
академик А. А. Рихтер
академик Д. С. Рождественский

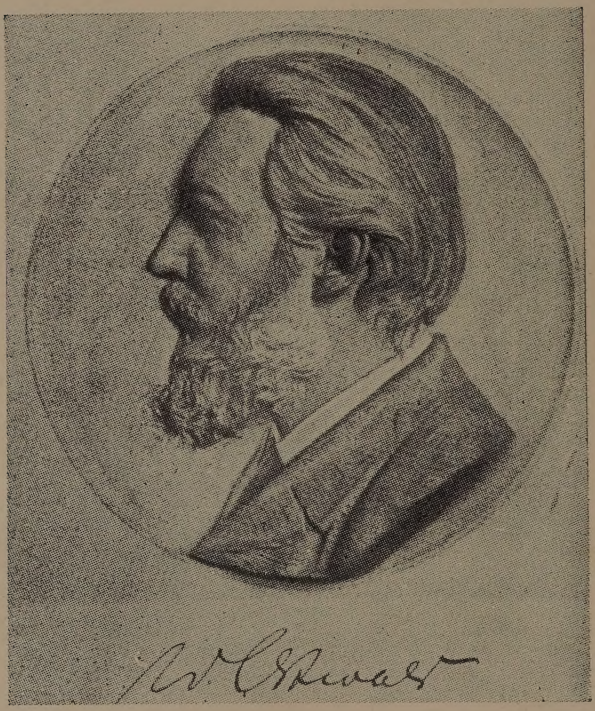
Ответственный редактор издания академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

Технический редактор Л. А. Федоров
Ученый корректор С. С. Чернявский

Начато набором в декабре 1933 г. — Подписано к печати 25 июня 1934 г.

204 (431—634) стр. (13 фиг.) + 1 табл.
Формат бум. 72 × 110 см. — $12^{6}/_{8}$ печ. л. — 42 000 тип. зн. в печ. л. — Тираж 3000
Ленгорлит № 9911. — АНИ № 245. — Заказ № 2940

Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12



ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

# ВИЛЬГЕЛЬМ ОСТВАЛЬД

(Член-корреспондент Академии Наук СССР)

НЕКРОЛОГ

Составлен акад. В. А. Кистяковским

Вильгельм Оствальд родился 2 сентября 1853 г. в г. Риге. Уже в 1878 г. он получил звание доктора химии в Дерпте, а в 1882 г., двадцати девяти лет, был избран профессором Рижского Политехнического института. В 1887 г. он избирается профессором Лейпцигского университета, в том же году основывает Zeitschrift für physikalische Chemie (дальше — Z. ph. Ch.).

Лейпцигская лаборатория Оствальда и новый журнал становятся мировым центром работ по физической химии. В 1889 г. и 1890 г. мне пришлось работать в этой лаборатории. Среди ассистентов и сотрудников Оствальда были: Юлиус Вагнер (Jul. Wagner) — неутомимый аналитик, Эрнст Бекманн (Ernst Beckmann), имя которого известно каждому, кто хоть раз определял молекулярный вес криоскопическим методом, знаменитый Вальтер Нернст (Walter Nernst) и не менее знаменитый Сванте Аррениус (Svante Arrhenius). Среди практикантов в лаборатории были: Георг Бредих (Georg Bredig), Макс Ле Блан (Max Le Blanc) и др. Позже в лаборатории Оствальда работали: Г. Фрейндлих, Виктор Анри, Бодлендер, Густав Таммани, Мейергоффер, П. Вальден и другие молодые ученые, впоследствии ставшие выдающимися профессорами. Из русских работали в той же лаборатории: Ив. А. Каблуков, А. В. Сперанский и Вл. Фед. Тимофеев и др. Все перечисленные имена говорят сами за себя.

Обыкновенно пишут, что В. Оствальд создал большую школу учеников, но можно отчасти сказать и наоборот, что школа учеников создала Вильгельма Оствальда. Молодые талантливые ученые способствовали особо высокому подъему научного уровня в Лейпцигской лаборатории, этому вторила сама жизнь.

Сама жизнь шла навстречу молодому энтузиасту Оствальду. Все окружающее было проникнуто научными интересами. Здесь приведу отрывок из случайно сохранившейся у меня песни, которой на комерше студенты-химики Фрейбергской высшей школы приветствовали Вильг. Оствальда, приехавшего со студентами-химиками Лейпцигского университета в Фрейберг.

На комерше присутствовал Вильг. Оствальд, а также Клеманс Винклер (лето, 1890 г.).

Willkommen, tausendmal willkommen,
Du chem'sche, akadem'sche Schaar vom lieben Pleiss-Athen![1]
Du hast den rechten Flug genommen,
Als Dir's gefiel, das Du zum Ziel Dir Freiberg auserseh'n.
Manch' chemische Beziehung hat
Die altersgraue Bergmannstadt,
Hier thun sich Dir die Herzen auf
Glückauf, glückauf![2]
Mit Radicalen und Valenzen
Mit Hydroxyl und Carboxyl, sonst auch mit Struktur
Pflegt Bergmanns Weisheit nicht zu glänzen...
Doch hat es aus der Bergeschacht
Zwei Elemente[3] neu gebracht,
Das felsenfest die Lehre steht
Der Periodicität.

(Май 1890 г.)

В этом стихотворении весьма характерно отразился антагонизм, который тогда был между химиками органиками и неорганиками, а также вырисовывается тогда зарождавшееся общее признание периодической системы Менделеева. Вот в этой атмосфере, насыщенной научными интересами, жил и работал В. Оствальд. Этим отчасти можно объяснить необыкновенную, почти легендарную его продуктивность, приведшую, правда, к нервному заболеванию и к преждевременному удалению от работы. Уже в 1906 г. В. Оствальд на 53-м году своей жизни должен был уйти на покой. Он поселился в своей даче вблизи Гросс-Ботена. Там он продолжал только литературную работу. Умер В. Оствальд 4 апреля 1932 г.

Нужно признать, что необыкновенный подъем научно-исследовательской работы в лаборатории В. Оствальда во многом обязан его организатор-

[1] Афины на Плайзе — это г. Лейпциг.

[2] „Счастливо на верх" — приветствие рабочих Фрейберга.

[3] Индий — Т. Рейх и Ф. Рихтер, 1863 г. Германий — откр. 1885 Кл. Винклером, предсказан Менделеевым — Эка-силиции.

скому таланту. Сам Оствальд придавал очень большое значение организаторским способностям. В своих «Lebenslinien» Оствальд пишет — «В общем я должен считать поле действия организатора выше и труднее, чем работу исследователя. Это подтверждается и моей собственной жизнью, я позже приступил к организаторской работе, чем к научной, и вместе с тем моя организаторская работа раньше закончилась».

Оствальд уделил много энергии и внимания организации и пропаганде новой дисциплины — физической химии. Насколько Оствальд ясно сознавал свою роль «агитатора» можно заключить по его словам, сказанным при поездке на научный съезд, в Leeds, в 1890 г., где он выступал в защиту новой теории электролитической диссоциации: «Я еду, чтобы проповедывать новое евангелие среди неверующих». Это новое евангелие была — теория электролитической диссоциации и новые методы физической химии. Действительно, вначале оппозиция против новых течений в физической химии была почти всеобщей. Когда Оствальд сообщил Эмилю Фишеру (синтез сахаров, строение белков и др.) о том, что новый криоскопический метод позволяет определять молекулярные веса химических соединений, знаменитый органик ответил: «Это совершенно не нужно, я, получая новые вещества, уже узнаю их молекулярный вес и в ваших новых методах не нуждаюсь». Позднее Э. Фишер и его ученики многократно пользовались криоскопическим методом. Другой случай: проф. в Упсале, Клеве, бывший председатель Нобелевского комитета, по поводу электролитической диссоциации скептически спросил: «И так вы верите, что там в стакане в растворе поваренной соли плавают в одиночку атомы натрия?». Наивность этого вопроса говорит сама за себя.

Оствальд еще в 1877 г. в своей диссертации пишет «Современная химия нуждается в реформе», и эту реформу в другом месте он называет «химической революцией». В. Оствальд был вождем этой химической революции.

Для характеристики легендарной продуктивности В. Оствальда приведу для примера только часть списка его обширных сочинений и только по химии и физической химии, не касаясь работ по философии, истории науки, учения о красках и многих других.

| | | |
|---|---|---|
| 1) Grundriss der allgem. Chemie, | содержащей . . . . . | 650 стр. |
| 2) Chemie für jedermann | » . . . . . | 450 » |
| 3) Die wissenschaftl. Grundlagen der analytischen Chemie | » . . . . . | 240 » |
| 4) Grundriss der anorganischen Chemie | » . . . . . | 860 » |

| | | |
|---|---|---|
| 5) Prinzipien der Chemie | содержащей . . . . . | 540 стр |
| 6) Hand- und Hilfsbuch zur Ausführung physiko-chemischer Messungen (вместе с Лютером) | » . . . . . | 810 » |
| 7) Allgemeine Chemie, 4 полутома | » . . . . | свыше 4000 » |
| 8) Elektrochemie, ihre Geschichte und Lehre и т. д. | » . . . . . | 1150 » |

Профессор Вальден, биограф Оствальда, считает, что уже к 1904 г. Оствальд написал около 16 000 страниц учебников, справочников и других книг на отдельные темы. Кроме того, его перу принадлежит около 300 научных статей, около 4000 рефератов и около 900 рецензий на книги. Другой биограф Оствальда, Павел Гюнтер, эту сверхпродуктивность объясняет тем, что В. Оствальд был в высшей степени одарен способностью к точному выражению своих мыслей, а также прекрасным стилем, беглым, при чем научная работа его не утомляла. Прибавлю, как ученик Оствальда, что приходилось поражаться его уменью утилизировать свое время. При консультациях по научным вопросам, которые он давал приходившим в его кабинет ученикам, он часто не отрывал глаз от своей письменной работы и казалось, что он одновременно продолжает писать свою работу и вместе с тем дает вам советы и консультации, часто очень удачные и полезные для вашей экспериментальной работы.

Многие книги Оствальда переведены с немецкого на другие языки. Его «Grundriss» переведен на все главные европейские языки. Кроме обширного числа книг по химии и физической химии Оствальд, как я уже упоминал, написал большое число книг и статей по философии, истории науки, учению о красках, а также редактировал два журнала «Z. ph. Ch.» и «Annalen der Naturphilosophie». Кроме того он редактировал ряд изданий под общим заглавием «Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften».

Переходя к анализу научных работ прежде всего нужно сказать, что Оствальд представлял собой своего рода двуликого Януса. С одной стороны ценные работы по точным физико-математическим наукам, с другой — малоценные и даже вредные работы по философии.

Здесь я позволю себе цитировать мнение Ленина о В. Оствальде. На стр. 137 изд. 1931 г. книги «Материализм и эмпириокритицизм» мы читаем: «... очень крупного химика и очень путаного философа—Вильгельма Оствальда». На стр. 280 той же книги, говоря об Оствальде и других ученых, Ленин пишет: «Ни единому из этих профессоров, способных давать самые ценные работы в специальных областях химии, истории, физики,

*нельзя верить ни в единое слово* [курсив — в цитируемом издании], раз речь заходит о философии».

Путаная философия Оствальда проникала отчасти и в его работы по химии и физической химии и приводила к ошибочным выводам. Так, например, ему принадлежит попытка отвергнуть реальность существования атомов и молекул. Уже в моих лекциях (изд. 1910 г.) я указал, что выводы Вильгельма Оствальда недостаточны даже для формального объяснения законов стехиометрии. Теперь, конечно, после работ J. Perrin этого не приходится повторять, но тогда в 1906—1910 гг. молодежь увлекалась новинкой и лозунгом В. Оствальда: «атомов не нужно».

Говоря о попытке В. Оствальда заменить атомистическую гипотезу выводом формального порядка, основанном на кажущейся возможности доказать необходимость закона кратных пропорций из существования трехчленных соединений, после цитаты из его работы, я пишу (литогр. лекции 1910 г.): «Существование трехчленных соединений (типа $AgNO_3$, $AgClO_3$, $K_2SO_4$ и т. д.) дает только некоторую вероятность (вероятность простоты) для существования закона стехиометрических чисел, но не доказывает логической необходимости его (противно мнению В. Оствальда) и, следовательно, не дает возможности объяснить этот закон. И поэтому, по нашему мнению, наука нуждается в атомистической гипотезе для объяснения закона стехиометрических чисел». Термин «гипотеза» здесь применен, конечно, в том значении, которое ему дается Ф. Энгельсом в «Диалектике природы». Опять-таки я не буду входить в детальную критику этих ошибок В. Оствальда.

Перехожу к работе В. Оствальда, непосредственно примыкающей к учению об атомах. Напомню, что в этой области Оствальду принадлежит заслуга введения в науку основной единицы атомного веса, как $^1/_{16}$ атомного веса кислорода. Это предложение прошло далеко не гладко. Против него выступил знаменитый Лотар Мейер. В 1889 г. на страницах «Berliner Berichte» разыгралась полемика, в результате которой было вскоре почти всеобщее признание предложения Оствальда, впоследствии узаконенного Международной Атомной комиссией.

Как упоминалось выше, Оствальду принадлежит заслуга организации Z. ph. Ch. и вместе с тем пропаганда новой дисциплины — физической химии. Как он повествует в юбилейном 100-м томе Z. ph. Ch. 1922 г., физическая химия в Германии во время основания журнала, в 1887 г., имела только 2 кафедры. В Гейдельберге — маститый Герман Копп и в Лейпциге — Густав Виддеманн, которого заменил впоследствии В. Оствальд, а в 1922 г.

(год выхода юбилейного 100-го тома) кафедры по физической химии имелись во всех высших учебных заведениях Германии, в которых преподавалась химия.

Сама организация Z. ph. Ch. была далеко не легкой задачей. Дело в том, что одновременно возникла независимая инициатива основать такой же журнал, при чем Оствальд получил приглашение сделаться постоянным референтом этого журнала. Он не согласился на эту второстепенную роль, он хотел быть хозяином нового дела. Вскоре ему удалось привлечь Ван'т-Гоффа к работе в новом своем журнале. Оствальд пишет: «das ein günstiger Stern über dem jungen Unternehmen geleuchtet hat», т. е., что благоприятствовавшая звезда светила над молодым предприятием. Действительно, вскоре появившаяся знаменитая статья Ван'т-Гоффа, излагавшая новую теорию растворов, а затем не менее знаменитая статья Сванте Аррениуса об элекролитической диссоциации, дали новому журналу всемирную известность. Дальнейшая разработка новой дисциплины и новых теорий школой Оствальда, Аррениуса и Ван'т-Гоффа привлекли к журналу подписчиков и обеспечили его материальный успех. Ostwald's Z. ph. Ch. (как его везде цитируют) сделался мировым центром новой физической химии. В нем помещали статьи не только германские ученые, не только русские ученые, которые вообще печатали свои химические статьи чаще всего на немецком языке (не считая, конечно, русского языка), но и англичане (знаменитый Вильям Рамзай), итальянцы и даже французы, например, знаменитый гренобльский профессор Франсуа Рауль.

До организации Z. ph. Ch. Оствальд опубликовывал свои работы по преимуществу в «Journal für praktische Chemie». Первая его работа, опубликованная в этом журнале, относится к 1875 г. и озаглавлена: «Chemische Massenwirkung des Wassers». Вскоре Оствальд помещает в том же журнале ряд статей, посвященных вопросу о химическом сродстве: «Volum-chemische und Optisch-chem. Studien» (1877—1880 г.) и «Chemische Affinitäts Bestimmungen» (1879—1881 г.). В группе этих работ имеется обширный материал по вопросу о химическом равновесии и скоростях химических реакций. Хотя этот материал не отличается особой прецизионностью, однако он все же мог послужить как самому Оствальду, так и Аррениусу при обосновании теории электролитической диссоциации.

Перехожу к работам Оствальда, связанным с теорией электролитической диссоциации. Они опубликованы уже в Z. ph. Ch. в период с 1887 по 1900 гг. Прежде всего нужно упомянуть ряд его работ под заглавием: «Elektrochemische Studien» периода 1885—1888 гг. Последние из них V

(1887 г.) и VI (1888 г.) опубликованы уже после появления теории электролитической диссоциации Аррениуса. В V-ой работе Оствальд проверяет закон Кольрауша, согласно которому при одном и том же разбавлении электропроводность равна сумме подвижностей ионов. Этот закон, как известно, имеет только приближенное значение. Точное значение имеет закон Кольрауша Гитторфа, согласно которому при предельном разбавлении эквивалентная электропроводность равна сумме подвижностей ионов $\Lambda_\infty = \overset{+}{u} + \overset{-}{u}$. Для других концентраций закон верен только в том случае, когда степень электролитической диссоциации сравниваемых электролитов одинакова, что выражается $\alpha\Lambda_\infty = \alpha(\overset{+}{u} + \overset{-}{u})$. Очевидно, что при одинаковости, например $\overset{+}{u}$, для иона калия во всех солях, одинаковость $\alpha\overset{+}{\Lambda}$ получится только в том случае, когда для всех сравниваемых солей будут одинаковые $\alpha$. В VI-ой работе Оствальд дает обширный опытный материал для вычисления максимальных эквивалентных электропроводностей при предельном разбавлении. В следующих затем работах он становится полностью на почву теории электролитической диссоциации и применяет ее для объяснения ряда явлений. Начиная с работы «Die Dissotiationstheorie der Elektrolyte» он является энергичным пропагандистом новой теории и использует полученный раньше опытный материал для ее проверки. Постоянство величины изменения объема при нейтрализации сильных кислот сильными основаниями, по данным «Volum-chemische Studien» (1877—1880 г.) приводит к объяснению процесса нейтрализаций, как образования воды из ионов $\overset{+}{H} + \overset{-}{HO} = H_2O$. Приближенная пропорциональность между каталитическим действием кислот и их электропроводностью, открытая Оствальдом (правильнее, пропорциональность с концентрацией иона водорода) служит ему основанием для утверждения существования зависимостей этих двух величин, требуемой теорией электролитической диссоциации. Он предполагает, конечно, согласно тому времени, что ион водорода $\overset{+}{H}$ вызывает катализ. Сейчас Гольдшмитом найдено, что не простой ион $\overset{+}{H}$, а комплекс $\overset{+}{H_3O}$ является катализатором.

В трех обширных экспериментальных работах 1889 г. «Affinitätsgrössen organischer Säuren» Оствальд дает громадный экспериментальный материал (изучено около 150 кислот) и проверяет известный закон Оствальда для одноэквивалентных кислот, согласно которому $\frac{\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{K_{Ostw}}{C}$, где $\alpha$ — степень электролитической диссоциации, $K_{Ostw.}$ постоянная Оствальда и $C$ — концентрация кислоты. Этот закон один мог бы соста-

вить имя ученому, так как здесь мы впервые в величине $K_{Ostw.}$ имеем мерило для силы кислот. Известно, что этому закону подчиняются только слабые электролиты, ибо для солей, а также сильных кислот и оснований закон активной массы, служащий для вывода закона Оствальда, затушевывается электростатическими взаимодействиями между ионами. Общеизвестно, что более 99% кислот относятся к слабым кислотам (почти все кислоты органической химии). В настоящее время вряд ли имеется одноэквивалентная органическая кислота, для которой не была бы определена константа Оствальда, за исключением, конечно, сильных кислот. Известно, что Оствальду удалось распространить свой закон и на двухэквивалентные кислоты, ионизирующие последовательно, т. е. сначала отделяющие только один ион водорода. А. Смис (проф. в Каире) изучил громадное число сложных кислот и доказал применимость к ним закона Оствальда. Количество кислот, к которым в настоящее время применим этот закон, можно считать уже трехзначными числами. Получен материал, который дает возможность отличать такие тонкости, как силу уксусной и пропионовой кислот. Было сделано много попыток распространить закон Оствальда и на сильные электролиты. Однако, все предложенные формулы имеют только эмпирическое значение, так как новейшие теории активности ионов (Льюиса и др.) не дали нам еще законов для электропроводности сильных электролитов (закон Дебайя-Кольрауша не дает прямого ответа на вопрос о «силе» электролита).

Непосредственно к работам Оствальда, связанным с теорией электролитической диссоциации, примыкают его работы по применению этой теории к аналитической химии. Здесь работы Оствальда можно считать наиболее плодотворными. Его замечательные формулировки являются руководящими во всей области современной аналитической химии.

Вспомним хотя бы простую формулировку: «Качественные реакции аналитической химии относятся к ионам, а не к молекулам».

Его идеи о двойных и комплексных молекулах послужили источником ряда работ. Так, например, мне удалось еще в лаборатории Оствальда систематически проработать область двойных и комплексных солей (1889—1890 г.), удалось распространить закон Кольраша-Гитторфа на комплексные соли, опытно его проверить над комплексными соединениями железа и кобальта. Тогда же (1890 г.) удалось предугадать существование у солей серебра комплексных катионов, которые позднее были открыты Абеггом и Гельбихом. Оствальду принадлежит введение термина «комплексный» в область неорганических солей. Ему принадлежит идея определения растворимости солей методом измерения концентраций по электродным потен-

циалам и ему же в значительной мере принадлежит представление о постоянной произведения растворимости. Однако, здесь трудно установить точно, где, так сказать, начинается Оствальд и кончается Аррениус. Сам Оствальд пишет, что его идеи возникли в беседах со Св. Аррениусом. Прибавлю от себя, что такие же беседы шли и с Вальтером Нернстом, и что влияние Нернста тоже сказывается в идеях Оствальда. Здесь как раз имеется тот случай, о котором я говорил раньше, что необыкновенной научной плодовитости Оствальда способствовало его окружение молодыми и талантливыми работниками. Все это, конечно, мной сказано не с целью умалить заслуги его в работах по аналитической химии, эти заслуги достаточно известны, сказанное лишь только подтверждает слова самого Оствальда. Здесь может быть уместно упомянуть о его отношении к теории гидратов. Он ее не признавал, хотя никогда не выступал против, так Оствальд допустил в моей работе 1890 г., сделанной под его руководством (в Z. ph. Ch.), идею об окружении ионов частицами воды и о взаимодействии ионов с этими частицами. Эта идея совпадает с современным представлением об ионных оболочках.

К работам Оствальда по электропроводности электролитов непосредственно примыкают его работы по электродвижущим силам гальванических элементов. В своей «Elektrochemie» и в своих учебниках он становится на прочную почву сторонника химической теории гальванических элементов. Здесь получается полная гармония с известными воззрениями Ф. Энгельса, изложенными в книге «Диалектика природы». Предложенное в моей «Электрохимии» (стр. 198, изд. 1914 г.) объяснение элиминирования величин контактных потенциалов взамен предложения Оствальда (он считал, что контактный потенциал между металлами ничтожно мал) я считаю более верным. Бесцельно требовать от какого бы то ни было исследователя, чтобы он сказал последнее слово в науке. Возможно, что мое и Оствальда объяснения будут заменены новыми в процессе эволюции науки. Однако центр дела остается не смещенным, именно, что не контакт металлов, а электро-химическая реакция определяет э. д. с. гальванических элементов. Прекрасным доказательством тому является известный опыт Оствальда. Приливанием раствора цианистого калия к медному электроду можно изменить полюса в гальваническом элементе Даниеля: медь становится анодом, а цинк катодом. Ясно, что дело не в контакте цинка с медью, так как при приливании цианистого калия этот контакт меди и цинка не изменяется, зато резко меняется электрохимическая реакция, медь начинает растворяться, а цинк выделяется из $ZnSO_4$, противно обычному процессу растворения цинка и выделения меди (из растворов медного купороса) в элементе Даниеля.

Нужно здесь упомянуть о ряде попыток Оствальда определить точно величину отдельных потенциалов, т. е. падения потенциала на границе электрода и электролита, из изучения электрокапиллярных явлений. Эти работы представляют теперь только экспериментальную ценность, теоретическое значение их утрачено. Уже в моей «Электрохимии», говоря об абсолютном потенциале (стр. 377) и о работах определить его я пишу: «Очень интересные экспериментальные исследования не убеждают нас в том, что значения отдельных потенциалов открыты». Это было написано в 1916 г. Это можно повторить и сейчас, так как ни Оствальду, ни его последователям не удалось найти точные величины для значения отдельных потенциалов. Только метод Нернста относительных потенциалов дает возможность разобраться в этой области.

Очень интересны работы Оствальда по изучению периодических явлений при растворении хрома, препарата Гольдшмидта, содержащего железо и включения хромовых солей. Впоследствии, после открытия мной мотохимических явлений, мне удалось объяснить эти процессы, как самопроизвольно периодически повторяющиеся мотохимические явления.

Работы Оствальда по энергетике отчасти примыкают к его работам по философии, к которым я отношусь отрицательно и думаю, что здесь нет особой необходимости детализировать эти общеизвестные (по Ленину) работы. Укажу только на то, что в этой области Оствальд не был самостоятелен. Все свои воззрения он позаимствовал отчасти у Гельма, отчасти у молодого, но очень талантливого Вильг. Мейергофера (Wilhelm Meyerhoffer).

Предложение Оствальда измерять химическую энергию «хемометром»[1] роль которого должен играть электрометр, является популяризацией, термодинамически строго обоснованной, идеи В. Гиббса о том, что измерение э. д. с. дает нам возможность вычислить величину термодинамического потенциала соответствующей химической реакции, протекающей в данном гальваническом элементе. Здесь не буду усложнять вопроса спором о терминологии изучаемых величин (см. G. N. Lewis and M. Randal. Thermodynamics), скажу только, что популярное представление Оствальда оказало благоприятное влияние на понимание этих явлений, несмотря на некоторую неточность, свойственную большинству популяризаций. Тут же позволю себе напомнить, что Оствальд является переводчиком классических

[1] Оствальд пишет: «Wir können somit das Ergebniss als gesichert annehmen, dass in der That das Elektrometer, als Chemometer dienen kann».

работ Гиббса по термодинамике, комментатором и популяризатором этих новых идей, подобно Ле-Шателье, сделавшим это во французской научной литературе.

Оствальд был талантливым конструктором физико-химической аппаратуры и великолепным экспериментатором. Я подчеркиваю: великолепным, вместо обычно применяемого в таких случаях термина «точным». Его опыты отличаются блестящей концепцией и остроумной конструкцией приборов. Но по самой сути своей натуры Оствальд не мог быть особо точным экспериментатором, просто — для этого у него не хватало времени.

В заключение я могу сказать только несколько слов о работах Оствальда по учению о красках, которым он посвятил последние годы своей жизни. Я этих работ не изучал, а поэтому привожу выписку из отзыва о них, сделанного В. Нернстом: «Последние двадцать лет Оствальд посвятил созданию учения о красках. Как великий художник жизни он сумел этим путем наполнить работой свой вечер жизни. С молодости он занимался рисованием красками». Далее я не буду приводить цитаты Нернста из «Z. f. Elektrochemie» 1932 г., стр. 339. Скажу только, что Оствальд стал в вопросе о красках в общем на сторону великого Вольфганга Гете и отошел от теории гениального Гельмгольца.

Наконец, нужно подчеркнуть особый талант Оствальда, — это его умение систематизировать и классифицировать научный материал. Этим объясняется большое достоинство его учебников и гандбухов. Общеизвестны также термины, им введенные для целей классификации: «аддитивный», «конститутивный», «коллигативный» и, наконец, его формулировка второго закона термодинамики, как невозможности вечного двигателя второго рода. Это определение дает возможность просто охватить основную суть этого закона.

Возвращаясь к характеристике личности Оствальда, прежде всего должно подчеркнуть его организаторские способности. Кроме упомянутого выше ему принадлежит: заслуга устройства образцовой лаборатории по физической химии в Лейпциге, участие в инициативе по организации Немецкого (Бунзеновского) электрохимического общества, организация интернационального союза химических обществ и организация международной атомной комиссии.

Оствальд ненавидел царскую Россию. Эта ненависть не перешла у него в революционную борьбу. Наоборот, повидимому она способствовала резкому и вызывающему германскому шовинизму. Оствальд в начале мировой войны подписал обращение немецких ученых, по своему содержанию тен-

денциозно-империалистическое. Снова ум ученого не был на должной высоте, и классовая подстилка взяла верх над научной мыслью.

Природная талантливость Оствальда — крупный ученый, выдающийся организатор, талантливый художник, фотограф и любитель-музыкант, находчивый конструктор физико-химических приборов, при необыкновенной работоспособности, — как бы затушевывает его идейные нехватки в области философии и политики. Констатируя таланты и заслуги Оствальда, не должно ни на минуту ослаблять бдительности в борьбе с его философскими и политическими атавизмами.

Оствальд был по истине двуликим Янусом, представляя «очень крупного химика и очень путаного философа», как определил его Ленин.

5 XII 1933.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

# О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ УПРОЩЕННОЙ ОСНОВНОЙ ФОРМЫ

Г. Г. АППЕЛЬРОТА

(*Представлено академиком* С. А. Чаплыгиным)

## ВВЕДЕНИЕ

Как я уже неоднократно указывал,[1]) всякая система алгебраических и полуалгебраических Д. У.[2]) может быть путем некоторых необратимых преобразований, — вводящих наряду с первоначальными новые дополнительны зависимые переменные,[3]) т. е., вообще повышающих порядок преобразуемой системы Д. У. (хотя и не изменяющих независимого переменного для полуалгебраических Д. У. всегда и всюду, а для алг. Д. У., если мы хотим привести их к случаю постоянных коэф., то по крайней мере под знаком дифференциала, а если не имеем этой цели, то тоже всюду), — приведена к виду:

1) Д. У. основной формы с постоянными или переменными для полуалг. случая коэф.

$$\frac{dz_i}{dt} = g_i(z_1, z_2, \ldots z_n, t), \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{Ia}$$

[1]) I. Основная форма системы алг. Д. У. Моск. мат. сб., т. 23, 1902. — II. К вопросу об основной форме системы алг. Д. У. Моск. мат. сб., т. 27, вып. 3, 1909. — III. О некоторых преобразованиях основной формы системы алг. Д. У. Моск. мат. сб., т. 32, 1932. — IV. Einige Klassen alg. D. G. der vereinfachten Fundamentalform, welche sich durch Quadraturen integrieren lassen. C. R. des Séances de la Société Math. de Moscou, 1926. — V. К вопросу о периодических решениях алг. Д. У. Моск. мат. сб., т. 34, 1927—1928. Под Д. У. здесь и всюду дальше нужно подразумевать слова: «дифференциальные уравнения». Приведенные здесь работы цитируются всюду под указанными около них римскими цифрами: I, II и т. д.

[2]) Д. У., которые содержат все зависимые переменные и их производные алгебраически, я называю алг. Д. У., если их коэффициенты суть или алг. ф. независимого переменного или постоянные величины. В противном случае я называю их полуалгебраическими.

В одном случае первоначальные зависимые переменные заменяются линейными комбинациями новых зависимых переменных, коих число вообще больше числа первоначальных.

где $g_i$ означают целые алг. многочлены степени не выше 2-й относительно

$$z_1, z_2, \ldots z_n,$$

или, если угодно, к виду:

2) Д. У. упрощенной основной формы с дополнительными или без дополнительных членов:

$$\text{(I)} \qquad \frac{dy_i}{dt} = y_i(f_i + \omega_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

где $f_i$ означают линейные однородные многочлены от $y_1, y_2, \ldots y_n$ с постоянными коэф., кои всегда можно без ущерба для общности предполагать целыми числами $\geqq -1$ и даже удовлетворяющими еще более тесным условиям, а $\omega_i$ представляют доп. члены,[1]) вообще являющиеся функциями от $t$.

Из сказанного, как мне кажется, можно заключить, что приведенные выше упрощенные формы Д. У. могут иногда оказаться, при надлежащем способе подхода, полезными с общей точки зрения при изысканиях об основных свойствах ф. (функций) — интегралов нелинейных[2]) алг. и даже некоторых полуалгебраических Д. У. или известных их классов или видов решений, но и помимо этого обстоятельства, повышающего, думается мне, интерес к этим формам, они могут иметь известное значение и сами по себе, как это по отношению к Д. У. (I) показывают недавние исследования[3])

[1]) Так как случай, когда все доп. члены постоянны, что всегда возможно предполагать для алг. Д. У., можно путем введения нового доп. зависимого переменного $y_{n+1}$, определяемого Д. У. $\frac{dy_{n+1}}{dt} = 0$, привести, как это легко видеть, к случаю, когда все $\omega_i = 0$, т. е. к отсутствию доп. членов, то всюду далее Д. У. упрощенной основной формы будут делиться мной на 2 категории: У. (уравнения) 1-й категории, когда хоть одно $\omega_i$ переменно, и 2-й, когда все $\omega_i$ постоянны и, даже возможно, все или частью равны 0, в чем есть некоторая, хотя и чисто внешняя, аналогия с делением лин. Д. У. на У. со 2-й и без 2-й части.

Должно отметить, что покойный М. Н. Лагутинский был первый, который в своей статье: «К вопросу о простейшей форме системы алг. Д. У.» (Моск. мат. сб., т. 27, вып. 4, 1909) показал, что каждая система алг. Д. У. может быть приведена в форму (1), но при этом он изменял независимое переменное и имел в виду только уравнения 2-й категории.

[2]) Об увеличивающемся значении нелинейных Д. У., как орудия познавания, см. напр.: Акад. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов. Основные проблемы нелинейной механики, 1932.

[3]) I. Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi. Atti della Accademia dei Lincei: Memorie, classe di Scienza fisiche. Vol. II, fasc. III, Ser. 6, 1926. — II. Та же самая работа с некоторыми редакционными изменениями и дополнениями, но под тем же самым заглавием, была напечатана также в Сборнике: «R. Comitato Talassografico Italiano. Memoria CXXXI. Venezia, 1927». Я знаком только с этой последней редакцией, которую и цитирую и то только по памяти, не имея сейчас под рукой самой работы. — III. Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie par V. Volterra, rédigées par M. Brelot. Paris, 1931. Это есть наиболее полное и систематическое изложение добытых результатов. Книга снабжена историческими и библиографическими указаниями. — IV. Ricerche matematiche sulle associazioni biologiche. Giorn. Ist. ital. Attuari. 2, 1931, pag. 295—355. К сожалению, я не мог добыть подлинника и знаком с работой только по рецензии В. Гливенко в Zentralblatt für

проф. Volterra по математической теории борьбы за существование, где он широко применяет уравнения этого типа, коснувшись при этом вопроса и о некоторых свойствах их интегралов.

В настоящей статье я также имею в виду посильно исследовать свойства, главным образом, действительных непрерывных (д. н.) решений Д. У. этой последней формы, как некоторой самостоятельной группы Д. У., примыкая к результатам, уже добытым проф. Volterra по отношению, главным образом, только к некоторым классам таких решений, и мною [1]) по отношению к д. н. периодическим решениям, — результатам, которые касались всегда только Д. У. 2-й категории, а у проф. Volterra были стеснены еще некоторыми другими условиями, и вся моя работа здесь направлена собственно на возможное пополнение и расширение этих результатов, с охватом в известных отношениях уже всей массы д. н. решений, что потребовало введения в изучение новых, до сих пор еще не выделявшихся из общей совокупности и потому детально еще не рассмотренных классов (A) подобных решений, и с рассмотрением всех возможных типов Д. У. (I) обеих категорий, не ограничиваясь только некоторыми и только положительными начальными значениями, как это делает знаменитый итальянский математик. Вместе с тем я посвящаю всю 2-ю главу, главным образом, более детальному изучению тех частных групп Д. У. второй категории, которые преимущественно имел в виду Volterra, хотя с рассмотрением при этом и некоторых новых групп, раньше никем не изучавшихся.

В результате этих моих стараний мне удается установить несколько, хотя и схематических, но общих и довольно наглядных законов распределения во всем пространстве: [2])

$$y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$$

(необходимые условия существования) интегральных кривых Д. У. обеих категорий и разных типов и еще несколько дополнительных этого рода условий по отношению к некоторым частным случаям, но по отношению

Math. und ihre Grenzgebiete. Bd. 3, H. I, 22 I 1932, S. 19. Судя по словам рецензента, представляет «элегантное» изложение предыдущей книги.

[1]) В моей работе V. Следует, быть может, отметить здесь, что значительная часть выводов этой работы, вместе с некоторыми предложениями о специальных группах Д. У. (I), но уже для случая $\omega_i = 0$, была мною еще в марте 1925 г. доложена на заседании Моск. мат. общества и позже, вся работа полностью, — на съезде русских математиков в Москве в мае 1927 г., причем с результатами проф. Volterra, не затрагивающего, впрочем, специального вопроса о периодических решениях, не считая одного места в его работе (III) стр. 17, где в одном простом примере устанавливается периодичность решения и то графическим путем, я познакомился уже по напечатании моей статьи V. Д. У. I категории лишь задеты Volterra.

[2]) Всюду далее это пространство часто обозначается как пространство $(y)$.

к определению характера зависимостей интегралов от $t$, а также по отношению к выводу достаточных условий существования (или несуществования) различных решений мне удалось достигнуть гораздо меньшего: а именно, в первом вопросе ограничиться в сущности результатами, получаемыми обычно для достаточно малых областей пространства ($y$) с помощью общей теории интеграции Д. У. и при том только по отношению к решениям, асимптотическим к так наз. точкам равновесия, а во 2-м получить некоторые дополнительные выводы, главным образом, только для известных специальных групп уравнений 2-й категории или для особых областей пространства:

$$y_1, y_2, \ldots y_n,$$

которые, впрочем, в некоторых случаях могут быть и неограниченно большего размера.

Что касается интегралов в комплексной области, которые, несмотря на главенствующую роль в приложениях действительных решений, весьма важны и с точки зрения последних, как позволяющие при достаточном изучении открывать наиболее точные и простые пути подсчета и этих последних, то в виду трудности вопроса я ограничился в настоящей работе, если не считать упомянутых выше результатов общей теории, только одним или двумя замечаниями о вычислении некоторых коэф. соответствующих рядов Лорана (в частности разложений около полюсов) и определением средних значений комплексных периодических решений, не входя в дальнейшие изыскания.

Во всяком случае, я думаю, что в виду вообще далеко недостаточной разработки проблемы определения свойств не только комплексных, но и действительных интегралов нелинейных Д. У., полученные в настоящей работе выводы не лишены некоторого интереса, хотя относятся только к одной частной форме таких уравнений и совсем не затрагивают вопроса об относительном расположении интегральных кривых, как, к сожалению, и многих других вопросов, не считая тех, которые затронуты лишь вскользь, как, напр., вопрос о решениях, устойчивых в смысле Пуассона.

## ГЛАВА I.

§ 1. В этой главе я буду рассматривать свойства интегралов, главным образом Д. У. (I).

$$\frac{dy_i}{dt} = y_i(f_i + \omega_i), \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

$$f_i = {}_ia_1 y_1 + {}_ia_2 y_2 + \ldots + {}_ia_n y_n$$

первой категории и притом довольно общего характера, говоря об уравнениях 2-й категории лишь в качестве следствия и только изредка как о самостоятельной, достаточно общей, теме, с отнесением более частных рассмотрений уравнений 2-й категории некоторых специальных форм, большей частью таких, которые уже изучались проф. Volterra, ко 2-й главе.

При этом все постоянные коэф.: ${}_ia_j$ и доп. члены $\omega_i$,[1]) если точно не указано обратное, будут предполагаться, как в этой, так и во 2-й главе, действительными, но вообще без всяких других ограничений, если последние точно не указаны, так же как и все $y_i$, предполагаемые, кроме того, вообще непрерывными в рассматриваемой, тоже вообще непрерывной, области действительных же значений $t$.

Главным образом, здесь нас будут занимать вопросы о распределении интегральных кривых в $n$-мерном эвклидовом пространстве

$$(y_1, y_2, \ldots y_n),$$

которое по примеру H. Poincaré, G. D. Birkhoff'a и многих других, я вместе с рассмотрением $t$, как времени, а всех интегральных кривых, как траекторий некоторой движущейся точки (Д. Т.) с координатами $y_1, y_2, \ldots y_n$, использую в целях придания наглядности полученным результатам, причем областп,[2]) где все $y_i$ сохраняют определенную систему знаков, я называю углами, а области, где одно или несколько $y_i$ равны 0, границами этих углов или границами их границ и т. д.

Чтобы придать своему изложению возможно более ясности, я сделаю сейчас несколько замечаний о самой форме (I) Д. У. и о некоторых очевидных свойствах их интегралов, замечаний, которые дальше будут нам довольно часто полезны. Также, прежде всяких выводов, я займусь еще установлением некоторых необходимых терминов, частью уже, впрочем, данных в моей работе V.

§ 2. *Замечание I.* Если ранг системы коэф.: ${}_ia_j$ какой-либо системы Д. У. (I) равен $r (r < n)$, т. е. детерминант $\Delta_r = ({}_ia_j)$ (основной детерминант) со всеми своими минорами до $(r+1)$-го порядка включительно равен 0, и хоть один минор $\Delta_r$ порядка $r$ отличен от 0, то, как это следует из общей

[1]) Функции $\omega_i$ всюду дальше, где не указано обратного, могут быть предполагаемы как аналитическими, так и неаналитическими с интегралами Коши.

[2]) Здесь мы имеем аналогию собственно с координатными углами обычного трехмерного пространства (и с плоскостями координат как их границами).

теории линейных алг. форм, можно соответственную систему Д. У. (I) совершенно эквивалентно представить в виде:

$$(2)\quad \frac{dy_i}{dt} = y_i\,[{}_ia_1(y_1-u_1) + {}_ia_2(y_2-u_2) + \ldots {}_ia_r(y_r-u_r) + \omega_i], \quad (i=1,2,\ldots n)$$

$$u_k = {}_k\alpha_{r+1}\,y_{r+1} + \ldots + {}_k\alpha_n\,y_n \qquad (k=1,2,\ldots r),$$

где ${}_k\alpha_j$ суть некоторые постоянные, определяемые из условия, что

$${}_ia_1u_1 + {}_ia_2u_2 + \ldots {}_ia_ru_r + {}_ia_{r+1}y_{r+1} + \ldots {}_ia_ny_n = 0,$$

причем предполагается некоторая определенная расстановка индексов и неравенство 0 детерминанта из системы $r$ первых коэффициентов.

Это есть первое формальное свойство.

Примечание I. Если $r=n$, то $({}_ia_j) \neq 0$, все $u_k = 0\,(k=1,\ 2,\ldots)$ и форма (2) не отличается от первоначальной (I).

*Замечание II.* Если мы имеем в виду такое решение Д. У. (I), где ни одна Ф. $y_i$ (ни один член решения) не равен тождественно 0 (главное решение для соотв. области значений $t$), то каждую систему (I) вместо формы (2) можно представить еще в следующем виде:

$$(2')\quad \frac{d\lg y_i}{dt} = {}_ia_1(y_1-u_1) + {}_ia_2(y_2-u_2) + \ldots + {}_ia_r(y_r-u_r) + \omega_i.$$

Отсюда можно заключить, что каждое главное решение Д. У. (I) с коэф., удовлетворяющими условиям замечания I, может быть определено в соответствующей области изменений $t$:

1) Через $n-r$ интегральных соотношений:

$$(2'')\quad {}_hA_{i_1}\lg(y_{i_1}|y_{0i_1}) + {}_hA_{i_2}\lg(y_{i_2}|y_{0i_2}) + \ldots + {}_hA_{i_r}\lg(y_{i_r}|y_{0i_r}) + {}_hA_{i_{r+h}}\lg(y_{i_{r+h}}|y_{0i_{r+h}}) + \underline{\Omega}_h = 0, \qquad (h=1,2,\ldots n-r),$$

где $\underline{\Omega}_h$ означает сумму, подобную сумме первой половины формулы $(2'')$, но только с заменой lg через соответ.:

$$\int_{t_0} \omega_{i_l}\,dt \qquad (l=1,2,\ldots r,\ r+h)$$

на ряду 2) с $r$ дифференциальных соотношений:

$$(2''')\quad y_k - u_k = \frac{1}{\Delta_r}\sum_{j=1}^{j=r} {}_kA_{ij}\left(\frac{d\lg y_{ij}}{dt} - \omega_{ij}\right) = \frac{1}{\Delta_r}\sum_{j=1}^{j=r} {}_kA_{ij}\,\frac{d\lg y_{ij}}{dt} + \Omega_k,$$

где $\Omega_k$ обозначает для краткости зависящую от $\omega$ часть суммы

$$(k=1, 2, \ldots r).$$

Соотношениям $(2''')$ может быть также придана форма $(2'''')$:

$$\int_{t_0}^{t} (y_k - u_k)\,dt = \frac{1}{\Delta_r} \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{j=r} {}_k A_{ij} \lg (y_{ij}/y_{0ij}) + \int_{t_0}^{t} \Omega_k\,dt,$$

причем во всех выше написанных соотношениях буквы A с двойными индексами означают соответствующие адъюнкты надлежащих миноров основного детерминанта.

Это — второе формальное свойство.

*Замечание III.* Если в системе Д. У. (I) все $y_i$ заменить через $\frac{d \lg z_i}{dt}$ (преобразование I):

$$(2^{v}) \qquad y_i = \frac{d \lg z_i}{dt}, \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

то после интеграции получаем:

$$z_i = z_{i0}\, e^{\int_{t_0}^{t} y_i\,dt}$$

и

$$(2^{vi}) \qquad y_i = y_{i0} (z_1 | z_{01})^{i a_1} (z_2 | z_{02})^{i a_2} \ldots (z_n | z_{0n})^{i a_n}\, e^{\int_{t_0}^{t} \omega_i\,dt}.$$

Отсюда

$$(2^{vii}) \qquad \frac{dz_i}{dt} = z_i y_{i0} (z_{01})^{-i a_1} (z_{02})^{-i a_2} \ldots (z_{0n})^{-i a_n} z_1^{i a_1} z_2^{i a_2} \ldots z_n^{i a_n}\, e^{\int_{t_0}^{t} \omega_i\,dt},$$

или, если предположить здесь все начальные значения $z_{0i}$ равными 1, что всегда возможно,

$$(2^{viii}) \qquad \frac{dz_i}{dt} = y_{0i} z_1^{i a_1} z_2^{i a_2} \ldots z_i^{i a_i + 1} \ldots z^{i a_n}\, e^{\int_{t_0}^{t} \omega_i\,dt} \qquad (i=1, 2, \ldots n).$$

Обе системы Д. У. (I) и $(2^{viii})$ будут, очевидно, при надлежащих свойствах интегрируемости Ф. $\omega_i$ и $y_i$ и при условии $z_{0i}=1$ совершенно эквивалентны.[1] Интегралы от $\omega_i$ могут быть обобщенного типа.

Это объясняет нам, почему, как мы увидим далее, некоторые свойства Ф.-интегралов $y_i$ стоят в связи не с свойствами Ф. $\omega_i$, но с свой-

[1] На форму $(2^{viii})$, как форму преобразования системы (I), я уже указал в моей работе (III), но только для случая 2-й категории.

ствами их интегралов $\int_{t_0}^{t} \omega_i\, dt$, что, конечно, позволяет в известной мере расширить круг изучаемых случаев сравнительно с общей теорией.

Так, например, может быть доказана следующая теорема.

**Теорема I.** Если внутри некоторой конечной области изменений $t$ все

$$\int_{t_0}^{t} \omega_i\, dt$$

будут представлять определенные непрерывные Ф. (условие $\alpha$), то для всякой системы конечных начальных значений $y_{0i}$, соответствующих одному из значений $(t=t_0)$ $t$ в этой области, существует система непрерывных Ф.-интегралов $y_i$, для некоторого конечного, включающего $t_0$, промежутка внутри области и при том только одна.

Это следует из факта существования здесь $y$ системы Д. У. $(2^{\text{VIII}})$, подобных Ф.-интегралов, соответствующих начальным значениям $z_{0i}=1$, и из формулы $(2^{\text{V}})$, прочитанной в прямом и в обратном направлениях.

Эта теорема будет нам полезна в дальнейшем, как и одна лемма, которую я, опираясь на применение общей теории к данной специальной форме Д. У., докажу сейчас.

Лемма 1. Если рассматривать систему Д. У. (I), где для некоторого промежутка времени $T$ все $\omega_i$ ограничены сверху по их абс. величине

$$(|\omega_i| \leq \omega \max),$$

то, обозначив сумму $\Sigma|y_{0i}|$ через $S_0$, $|_i a_i|\max$ через $a$, произведение $a(t-t_0)$ через $\tau$ и $\frac{\omega \max}{a}$ через $\omega$, мы будем иметь, что для каждого промежутка времени, который лежит внутри $T$ и который удовлетворяет условно

$$\tau \leq \bar{\tau}$$

где $\bar{\tau}$ определяется равенством

$$\omega\bar{\tau} = \lg\left[1 + \omega|s_0\left(1 + \frac{s_0 + \omega}{\sigma}\right)\right],$$

всегда будет иметь силу неравенство:

$$\sum|y_i - y_{0i}| \leq \sigma,$$

где $\sigma$ обозначает некоторый произвольно устанавливаемый положительный предел.

Действительно, составив Д. У. для мажоранты $S$ суммы $\sum|y_i - y_{0i}|$, получим

$$\frac{dS}{dt} = (S + s_0)(S + s_0 + \omega),$$

откуда

$$S = s_0 \frac{(s_0 + \omega)(e^{\omega\tau} - 1)}{\omega + s_0(1 - e^{\omega\tau})}. \tag{3}$$

Так как для правильности дальнейших выводов должно быть всегда $S \geq 0$, то $\tau$ должно всегда удовлетворять условно

$$\omega + s_0(1 - e^{\omega\tau}) \geq 0,$$

иначе

$$\lg\left(\frac{\omega}{s_0} + 1\right) \geq \omega\tau. \tag{3'}$$

При соблюдении этого условия всякое увеличение $\tau$ вызывает увеличение $S$ и обратно, как это непосредственно очевидно из формулы (3), и мы можем для того, чтобы иметь $S \leq \sigma$, $\left(\text{а, следовательно, и } \sum|y_i - y_{0i}| \leq \sigma\right)$ соответствующий предел $\bar{\tau}$ промежутка $\tau$ определять из соотношения

$$\sigma = s_0\left[\frac{(s_0 + \omega)(e^{\omega\bar{\tau}} - 1)}{\omega + s_0(1 - e^{\omega\bar{\tau}})}\right], \tag{3''}$$

или, что то же, из соотношения

$$\omega\bar{\tau} = \lg\left[1 + \frac{\omega}{s_0(1 + (s_0 + \omega)|\sigma)}\right], \tag{3'''}$$

как это прямо следует из той же формулы (3), а в случае $\omega = 0$, очевидно, из равенства:

$$\bar{\tau} = \sigma|s_0(\sigma + s_0)$$

Как легко усмотреть, условие (3') будет при этом также непременно удовлетворено, приняв в случае $\omega = 0$ вид:

$$\frac{1}{s_0} \geq \tau.$$

Таким образом наша лемма доказана.

Примечание I. Из формулы (3''') не трудно видеть, что $\omega\bar{\tau}$ связано собственно с отношениями:

$$\frac{\omega}{s_0} \quad \text{и} \quad \frac{\sigma}{s_0}.$$

Примечание II. Если применять предыдущую лемму отдельно к части промежутка, где $t \geq t_0$ и к части, где $t \leq t_0$, то, обозначая соответствующие пределы через $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$, $\omega_{\max}$ через $\omega_1$ и $\omega_2$, а $\sigma$ через $\sigma_1$ и $\sigma_2$, получим:

$$\omega_i \bar{\tau}_i = \lg\left[1 + \omega_i |s_0\left(1 + \frac{s_0 + \omega}{\sigma_i}\right)\right]. \qquad (i=1, 2)$$

Предел $\bar{\tau}$ для всего промежутка будет здесь равен

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2.$$

Я закончу этот параграф еще одним замечанием относительно формы Д. У. (I), справедливость которого прямо вытекает из общих свойств лин. алг. форм.[1])

*Замечание IV.* Каждая система Д. У. (I) может быть всегда представлена в виде:

$$(2^{IX}) \qquad \frac{dy_i}{dt} = \alpha_i y_i \left(\frac{\partial W}{\partial y_i} + H_i + \underline{\omega}_i\right), \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

где $\alpha_i$ означают произвольные постоянные множители,

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} \bar{a}_j y_i y_j \qquad (ij = 1, 2, \ldots n)$$

представляет некоторую квадратичную форму с постоянными, легко определяемыми коэффициэнтами и каждое

$$H_i = \sum_j \bar{a}_j y_j \; (_i\bar{a}_j = -\,_j\bar{a}_i)$$

некоторую линейную кососимметричную форму, тоже с постоянными коэффициентами.

При этом:

$$_i\bar{a}_j = \frac{1}{2}\left(\frac{_ia_j}{\alpha_i} + \frac{_ja_i}{\alpha_j}\right),$$

$$_i\bar{a}_j = \frac{1}{2}\left(\frac{_ia_j}{\alpha_i} - \frac{_ja_i}{\alpha_j}\right).$$

Примечание III. Я называю частные производные $\frac{\partial W}{\partial y_i}$ симметрическими, а линейные формы $H_i$ кососимметрическими слагающими вторых частей соответственных Д. У. (I).

[1]) Здесь можно также употреблять терминологию теории тензоров (собственно аффиноров).

Если $W = 0$, то соответственная система Д. У. (I) называется системой (I) кососимметрического,[1]) а если все $H_i = 0$, то симметрического типа.

Формула ($2^{IX}$) найдет свое применение во 2-й главе при изысканиях о специальных группах Д. У. (I) второй категории.[2])

§ 3. Но теперь я буду рассматривать Д. У. (I) обеих категорий, начиная с наиболее простых свойств их д. н. решений, причем для ясности и точности изложения необходимо будет ввести некоторые новые термины, что я и попытаюсь сейчас сделать, по крайней мере для ближайших нужд, а именно рядом с уже введенными терминами, каковы: основной детерминант, главное решение, категории и виды систем: Д. У. (I), я введу еще следующие.[3])

Если рассматриваемое в некоторой области изменений $t$ решение какой-либо системы Д. У. (2) содержит одно или несколько (однако, в числе $\nu$, не большем $n-1$) интегральных соотношений вида (первая часть решения):

$$y_{i_1} = y_{i_2} = \ldots = y_{i_\nu} = 0,$$

так что вторая, не уничтожающаяся часть этого решения будет во всей области определяться через систему Д. У. (I), порядка ($n - \nu$ ниже $n$), получающуюся из первоначальной путем положения там всех соответственных $y_{i_j}$ равным 0, то я называю такое решение приведенным (в соответ. области $t$) решением $(\overline{p})$, а систему Д. У. (I), определяющую его вторую часть приведенной формой первоначальной системы Д. У. (I) или просто «приведенной системой Д. У. (I)» ($\overline{\text{Д. У. (I)}}$), причем переменными, относительно которых произведено приведение здесь будут $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots y_{i_\nu}$, что можно обозначить еще так $(\overline{\text{Д. У. (I)}})_{i_1, i_2, \ldots i_\nu}$. Система Д. У. (I), где все $y_i \not\equiv 0$, будет главной системой. Порядок $\mu$ подобных приведенных систем всегда заключается в пределах: $1 \leq \mu \leq n-1$, будучи равен: $\mu = n - \nu$, и всякая приведенная система порядка $\mu > 1$ может в случае нужды

[1]) Уравнения этого типа играют в исследованиях проф. Volterra особенно важную роль. См., напр., страницы 105—130 его работы III. Также те случаи, когда $H_i \not\equiv 0$, но при $\alpha_i > 0$ форма $V$ является определенно-отрицательной, — входят в круг его изучений.

[2]) Должно отметить, что иногда полезно различать между Д. У. (I) второй категории следующие два вида: 1) вид 2-й, если в системе (I) нет ни одного Д. У. формы $\frac{dy_j}{dt} = 0$ и все $\omega_i = 0$, и 2) Д. У. вида 1-го, если хоть одно из этих двух условий не соблюдается. Если предварительно исключить путем интеграции все уравнения формы $\frac{dy_j}{dt} = 0$, то различение видов будет определяться только вторым условием.

[3]) Должно заметить, что как эти, так и другие термины, встречающиеся в настоящей статье, были уже частью введены в моей работе V.

быть приведена еще дальше. В таком случае она играет по отношению к дальнейшим приведенным роль главной системы, а ее решение, где ни одно новое $y_i$ не равно 0, роль главного решения. Первоначальная система Д. У. (I) будет, очевидно, играть роль главной по отношению ко всем приведенным (первонач. Д. У. (I)).

Для прерывных[1]) решений, особенно в не аналитических случаях, не исключается возможность быть приведенными на одном и главными на другом участке изменений $t$. Должно отметить также, что приведенное решение какой-либо главной системы и главное решение приведенной системы суть, очевидно, не одно и то же. Последнее совпадает со 2-й частью первого, но для краткости речи я буду только тогда различать эти понятия, если иначе страдает ясность изложения.

Результаты приведения зависят, очевидно, только от ступени $\nu$ приведения, где $n = \mu + \nu$, и от его общего характера, т. е. от числа $\nu$ приводимых к 0 Ф. $y_i$ и от их индексов: $l_1, l_2, \ldots l_\nu$, но не от порядка последних, совершенно так же, как это имеет, напр., место при дифференцировании и подобных операциях.

Все решения каждой рассматриваемой системы Д. У. (I) могут, таким образом, быть или 1) ее главным решением, или 2) ее приведенными решениями на различных ступенях приведения, или, наконец, 3) еще одним, всегда существующим (тривиальным) решением вида:

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0.$$

Этому 3) решению в пространстве $(y)$ соответствует точка — начало координат.

Если рассматривать совокупность всех главных решений первоначальной системы Д. У. (I) порядка $n$, равно как и совокупности главных решений каждой приведенной системы, как отдельные группы решений, то мы получим $2^n - 1$ таких групп или, если прибавить сюда еще тривиальное решение, $2^n$.

Интегральные кривые в случае приведенных решений лежат, очевидно, для каждой области соответственных изменений $t$ на границах надлежащих углов или на границах их границ и т. д. соответствующего пространства $(y)$,

[1]) Во многих механических, физических и т. п. задачах и в случае аналитических Д. У. не исключается возможность решению вопроса составляться, так сказать, из кусков различных аналитических решений, как это, напр., будет в задаче о движении упругого шара между двумя упругими же стенками и т. п. Подобные точки, так сказать, «перерыва» определяются уже не характером Д. У., а характером изучаемого явления, который Д. У. отражает только отчасти.

если оно будет главным пространством, и такие решения могут поэтому быть названы «пограничными решениями».

Очевидно, что каждое пограничное решение будет приведенным.

С приведением соответствующее решению пространство $(y)$ и его пограничные области как бы делаются теснее, но методы исследования остаются без изменения, только в пространстве с меньшим числом измерений, которое я называю приведенным пространством.

По отношению к высшим ступеням приведения оно тоже играет роль главного. В нем мы также различаем угловые пространства и их границы. На последней ступени приведения все пространство и его границы совпадают с соответственными координатными осями главного пространства $(y)$.

В тех случаях, когда наши выводы одинаково относятся как к главной, так и к приведенным системам, я часто говорю о рассматриваемой системе Д. У. (I) или вообще о системе Д. У. (I) без особых различений.

§ 4. В этом параграфе я займусь изучением простейших основных свойств для, главным образом, непрерывных (по крайней мере в рассматриваемой области значений $t$), решений Д. У. (I), имея в виду связь между ними и свойствами $\omega_i$ и притом для всей массы решений, а не для каждого из их специальных классов отдельно, как это будет иметь место дальше.

**Теорема II.** Если главное решение какой-либо системы Д. У. (I) действительно внутри некоторой действительной области изменений $t$ (или алг., периодично и т. п.), то все доп. члены $\omega_i$ должны здесь быть также действительны, или однозначны (или алг., периодичны и т. п.).

Обратно, если хоть один доп. член не действителен, или $t - t_0$ не действительно, или хоть одно $\omega_i$ многозначно, трансцендентно, не периодично и т. п., то главное решение само комплексно, или многозначно, или трансцендентно и т. п.

Если рассматриваемая система Д. У. (I) допускает периодическое решение, т. е. совокупность Ф.-интегралов $y_i$, которые все суть периодические Ф. какого-либо одного общего периода $T_p$, то все $\omega_i$ тоже должны иметь один общий период $T_\omega$,[1]) причем $T_\omega$ или равно $T_p$ $(T_\omega = T_p)$ или $T_p = mT_\omega$, где $m$ означает некоторое целое число.[2])

[1]) $T_p$ и $T_\omega$ означают здесь наименьшие общие периоды: $T_p$ функций $y_i$, а $T_\omega$ функций $\omega_i$. Наименьший общий период тех и других будет $T = T_p$.

[2]) Я считаю нужным отметить здесь, что вопреки не совсем точной редакции, которую допускают даже такие ученые, как H. Poincaré (см. Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, t. I, § 38, p. 89) и E. Picard (Traité d'Analyse, t. III, 3-me édition, 1928, ch. VIII, § 12, p. 172), говоря о необходимости равенства (точнее соизмеримости) между периодом решения и периодом коэф. Д. У., для Д. У. иного типа, чем (1), вообще возможны иногда случаи,

Это прямо следует из формы (I) Д. У.

**Теорема III.** Как мы уже знаем из теоремы I в каждой такой конечной области изменений $t$, где все $\int_{t_0}^{t} \omega_i\, dt$ непрерывны, всегда существует в достаточной близи каждой конечной системы нач. значений $y_{0i}$ одна и только одна система непрерывных Ф.-интегралов $y_i$.[1])

Здесь мы добавим к этому, что каждая из этих Ф. $y_i$ может быть или всегда $\neq 0$, или $= 0$ внутри всей области существования такой непрерывной системы интегралов.

Первое утверждение доказано в § 2, а второе есть очевидное следствие первого.

Примечание I. Что касается всей конечной области непрерывности

$$\int_{t_0}^{t} \omega_i\, dt,$$

то в ней могут быть такие значения $t$, при стремлении к которым некоторые $y_i$ (вернее вся $\sum |y_i|$) стремятся к $\infty$ (а некоторые $y_i$, быть может, и к 0), но нет таких, где имело бы место только последнее.

**Теорема IIIa.** В области, где хоть один $\int_{t_0}^{t} \omega_i\, dt$ допускает конечный скачок (ступенчатая прерывность), непрерывность всех $y_i$ невозможна (со значением 0 или без него), но необходимо, чтобы хотя некоторые $y_i$ были тоже ступенчатопрерывны или даже делали бесконечно-большие скачки (но с обращением, быть может, при этом некоторых в 0).

когда такой соизмеримости не наблюдается, как это, напр., видно из следующего простого примера.

Возьмем Д. У.:

$$\frac{d^4x}{dt^4} - xk^4 - \left(\frac{d^2x}{dt^2} - xk^2\right)^2 \sin t = 0.$$

Очевидно, что все решения лин. Д. У.:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = xk^2$$

будут решениями и предыд. Д. У., но данное лин. Д. У. обладает периодическим решением вида:

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt.$$

Следовательно, первоначальное Д. У. допускает периодические решения с периодом

$$Tp = \frac{2\pi}{k},$$

который может быть и несоизмерим с периодом $2\pi$ его коэффициентов.

[1]) Во всех следующих теоремах (IIIa и IIIb) подразумеваются именно такие интегралы или их непрерывная последовательность.

Это следует из формулы (2′a) после ее интеграции:

$$(2'a) \qquad \lg(y_i|y_{0i}) = {}_ia_1\int_{t_0}^{t} y_1\,dt + \ldots + {}_ia_n\int_{t_0}^{t} y_n\,dt + \int_{t_0}^{t}\omega_i\,dt$$

или

$$(2'b) \qquad y_i = y_{0i}e^{{}_ia_1\int_{t_0}^{t_0} y_1\,dt + \ldots + {}_ia_n\int_{t_0}^{t_0} y_n\,dt + \int_{t_0}^{t_0}\omega_i\,dt} \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

**Теорема IIIb.** В конечной области, где хоть один $\int_{t_0}^{t}\omega_i\,dt$ допускает бесконечный скачок, непременно хоть одно $y_i$, если не делается 0, не будет непрерывным или только ступенчато-прерывным, но необходимо допустит бесконечно большие или же нулевые значения.

Это следует из той же формулы (2′a).

Примечание I. Для каждого действительно непрерывного решения, где $y_i \not\equiv 0$,

$$\int_{t_0}^{t} y_i\,dt$$

представляет некоторую монотонную Ф. от $t$.

Примечание II. Все теоремы III, как и теорема I, могут существовать иногда только для некоторых соответственно приведенных систем.

Примечание III. Все непрерывные решения в случае теоремы III определяют, очевидно, только такие интегральные кривые, которые внутри соответственной области изменений $t$ или лежат сполна на границах углов (пограничные решения), или никогда не достигают последних, по крайней мере для конечных значений $t$, т. е., всегда лежат здесь внутри одного и того же угла, который соответствует системе нач. значений:

$$y_{01},\ y_{02},\ \ldots\ y_{0n}.$$

В аналитическом случае совпадение интегральной кривой с пограничной плоскостью на некотором протяжении определяет для данного аналитического решения равенство $y_i = 0$, как постоянное.

Вообще, очевидно, что в случае аналитических $\omega_i$ Ф. $y_i$, не равные постоянно 0 могут принимать значения 0 только в особых точках или при $t = \infty$.

**Теорема IV.** Если для некоторого конечного промежутка изменений $t$ средние значения $(\bar{y}_k)$ некоторых $y_k$ в действительных непрерывных решениях

системы Д. У. (I) с дополнительными членами $\omega_i$, удовлетворяющими условию ($\alpha$), равны 0, то эти $y_k$ равны 0 внутри всего этого интервала и, конечно, обратно, т. е. если там $y_k = 0$ всюду, то и $\bar{y}_k = 0$.

Знаки остальных $y_i$ совпадают всегда в этом случае с знаками их средних значений.

Это следует из теоремы III и необходимости, при наличии равенства $\bar{y}_k = 0$, перемены знака ф. $y_k$ ($y_k \neq 0$) внутри рассматриваемого интервала, что, однако, здесь невозможно. Таким образом, здесь при $\bar{y}_k = 0$ и $y_k$ всегда равно 0 в пределах промежутка.

§ 5. Теперь я перейду к изучению уже отдельных классов непрерывных действительных решений Д. У. (I) но, впрочем, только таких, что все входящие в них $y_i$ остаются действительными и непрерывными, если $t$ изменяется от некоторого конечного $t$ до $+\infty$ (или $-\infty$), что всегда дальше и предполагается,[1]) как это делалось не раз и другими учеными (Poincaré, Ляпунов, сам Volterra, Birkhoff и др.). Такие решения я буду называть право (или лево) непрерывными, а соответственные им ветви интегральных кривых иногда отмечать как правые или левые ветви. Для рассматриваемых далее периодических решений будет, конечно, предполагаться обоюдосторонняя непрерывность, т. е. непрерывность при изменении $t$ от $-\infty$ до $+\infty$, для существования которой, разумеется, необходимо и достаточно непрерывности только внутри периода $T_p$.

Что касается доп. членов $\omega_i$, то для них тоже всегда далее будет предполагаться, что они удовлетворяют условию ($\alpha$) во всей правой (от $t_0$ до $+\infty$) или соответственно левой (от $t_0$ до $-\infty$) области изменения $t$, а в случае периодических решений и вообще всюду, т. е. от $t = -\infty$ до $t = +\infty$.

Всю массу действительных право (или лево) непрерывных решений Д. У. (I) я разобью, для удобства рассмотрения, на следующие 5 классов.

1) Первый класс составят решения вида:

$$y_i = \text{const.} \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

[1]) Таким образом во всем последующем изложении решения, называемые непрерывными, могут быть такими, кроме случая периодических решений, только, т. е. односторонне, и даже двусторонняя непрерывность может не исключать прерывности при некоторых конечных значениях $t$. Могут быть даже такие системы Д. У. (I), у которых все решения действительные и мнимые, за исключением какого-либо определенного типа частных интегралов, суть прерывные, в этом последнем смысле. Так, напр. — подобное имеет место, как это не трудно обнаружить, по отношению к системе Д. У. (I) ($2^{IX}$), где все $\omega_i = 0$, $\alpha_i = 1$ и $W = {}^1/_2 (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)^2$, за исключением частного интеграла: $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 0$.

Такое решение, если оно конечно, определяет одну неподвижную точку или, в особых случаях, бесконечно много таких точек (целую плоскость, линию и т. п.) в конечных частях пространства ($y$). Эти точки (плоскости, линии и т. п.) я называю точками равновесия (плоскостями, линиями равновесия и т. п.) и обозначаю сокращенно как (Т. Р.).

Координаты их $\bar{y}_i$ удовлетворяют, очевидно, следующей чисто алг. системе уравнений n-го порядка:

$$\bar{y}_i(\bar{f}_i + \omega_i) = 0, \tag{4}$$

где

$$\bar{f}_i = {}_ia_1\bar{y}_1 + {}_ia_2\bar{y}_2 + \ldots + {}_ia_n\bar{y}_n$$

и только те $\bar{y}_i \neq 0$, для которых $\omega_i$ постоянны, т. е. точки равновесия, в случае хоть одного переменного $\omega_i$ суть непременно пограничные точки.

В случае неопределенного решения уравнений (4) я говорю о местах равновесия смешанного типа. Об этом более подробно см. § 6.

Бесконечное решение уравнений (4) и указывает, очевидно, на невозможность соответственных точек равновесия.

2) Второй класс образуется из периодических[1]) решений.[2]) Такие решения здесь, вообще говоря, только тогда возможны, когда хоть некоторые $\omega_i$ суть или периодические функции одного и того же периода, или постоянные величины. Как главные решения они могут существовать только у систем Д. У. (I), где все $\omega_i$ обладают такими свойствами (условие $\beta$). Если, как это всегда предполагается, соответственные $\omega_i$ удовлетворяют всюду еще условию ($\alpha$), то непрерывные действительные периодические решения, если они существуют, лежат или всегда внутри, или всегда на границах соответственных углов. Я буду для краткости обозначать подобные д. н. периодические решения как решения (Р). Очевидно, что, если для какого-либо члена подобного решения соответствующее периоду среднее значение $\bar{y}_i = 0$, то и сама ф. $y_i$ всегда $= 0$.

3) Решения 3-го класса будут совпадать с теми, которые преимущественно изучались проф. Volterra (solutions à variation bornée. См. его работу III, стр. 47). К этому классу будут относиться все действительные право (или лево) непрерывные решения (главные или приведенные), которых интегральные кривые не проходят ни бесконечно-далеко, ни бесконечно-

[1]) Но уже непременно переменного характера, точно также и дальше (кроме особо оговоренных случаев), говоря о решениях (V), мы всегда подразумеваем только решения непериодического типа.

[2]) В моей работе V первый и второй классы решений слиты в один, чего нет теперь.

близко от границ соответственного угла[1]) главного или приведенного пространства, т. е. для которых, если $y_i \neq 0$, то при всем правом (или левом) изменении $t$ удовлетворяются неравенства (свои для каждого решения):

$$ {}_ib_1 \leq y_i \leq {}_ib_2, $$

где ${}_ib_1$ и ${}_ib_2$ означают некоторые, отличные от 0 и $\infty$, постоянные одного и того же знака (решения, ограниченные сверху и снизу). Эти решения, подобно решениям (P), при $\omega_i$, удовлетворяющих условию ($\alpha$), могут быть или главными, всегда внутри соответственных углов лежащими, или приведенными, лежащими на границах этих углов, решениями. Я буду дальше обозначать их в честь славного итальянского математика, их впервые исследовавшего, как решения (V). Сумма

$$ \sum |y_i| + |y_i^{-1}| $$

для главного или для приведенного решения (V) всегда ограничена и сверху и снизу. Некоторые из решений (V) могут быть асимптотическими по отношению к решениям первых двух классов, но непременно к главным, а не к пограничным, если сами решения (V) главные; некоторые другие обладают устойчивостью в смысле Пуассона и могут напоминать своим видом кривые типа Лиссажу, т. е., иначе говоря, способны бесконечно часто возвращаться в любую близость всякого уже пройденного положения.

4) Если д. н. решения обладают вышеуказанными свойствами решений (V) не постоянно, а с промежутками (спорадически), но так, что как бы время ни возрастало, это их свойство не теряется, то я отношу их к 4-му классу и обозначаю, как решения (A),[2]) каковой класс устанавливается здесь впервые. Сумма

$$ \sum |y_i| + |y_i^{-1}| $$

будет тут спорадически ограничиваться сверху и снизу и движущаяся точка (Д. Т.) соответствующей интегральной кривой (для главного или для при-

[1]) Расстояние движущейся точки (Д. Т.) от начала координат будет здесь для каждой такой интегральной кривой, очевидно, ограничено и сверху и снизу.

[2]) Проф. Volterra различает иногда (см., напр., стр. 68, 88, 104 его работы III) два способа приближения точки (Д. Т.) к началу координат или вообще к точке равновесия: «façon régulière ou non»: первый соответствует асимптотическому сближению, а второй равенству 0 нижнего предела соответственных расстояний, которые оба могут существовать как для решений (A), так и для (V) и (B) и притом в первом случае второй способ для всяких, а первый только для главных мест равновесия смешаного типа, во втором случае (конечно, учитывая приведенность) только не для пограничных, а в третьем только для пограничных точек, но двух классов (A) и (B) он не различает Также он нигде не касается вопроса об устойчивости в смысле Пуассона.

веденного решения (A)) должна непременно время от времени появляться в некоторой конечной, не соприкасающейся с границами главного (или приведенного) пространства ($y$) области (центральной области решения).

Для всей же правой (или левой) области изменения подобная сумма будет здесь всегда неограниченной сверху, но расстояние от начала координат может иногда односторонне ограничиваться сверху или снизу, так что решения (A) всегда, в общем, неограничены или с двух или с одной стороны (верха и низа).[1])

Асимптотизм к решениям 2-го и 3-го классов здесь, очевидно, никогда невозможен, но асимптотизм к главным местам равновесия смешанного типа и устойчивость в смысле Пуассона возможны, последнее особенно в центральной области, хотя бы и частично, а не по отношению ко всей соответственной ветви интегральной кривой.

5) Пятый класс содержит все остальные действительные право (или лево) непрерывные движения. При $t \to \infty$ сумма

$$\sum |y_i| + |y_i^{-1}|$$

(для соответственного главного или приведенного решения) будет тут всегда стремиться к $\infty$, т. е., соответствующие решения здесь всегда (односторонне или двусторонне) не ограничены.

Эти решения я буду дальше обозначать как решения (B).

Все д. н. решения, где движущаяся точка (Д. Т.) стремится или в $\infty$ или асимптотически приближается к какой-либо границе, или к кривой или точке на ней, главного или приведенного пространства (включая сюда и начало координат), суть решения (B), равно как и те д. н. решения, где точка (Д. Т.), описывая все более и более расширяющиеся петли около центральной части угла, стремится то теснее прижаться к границам, то уйти возможно далее в, так сказать, свободное пространство ($y$).

*Замечание I.* Должно отметить, что одно и то же решение для $t \to +\infty$ и для $t \to -\infty$ может принадлежать к различным классам, также быть, с одной стороны, непрерывным, а с другой, прерывным или даже делаться мнимым.

*Замечание II.* В случае Д. У. (I) второй категории ко всем предыдущим классам непрерывных решений относится известный общий закон

[1]) Ограниченность или неограниченность могут быть считаемы также по модулю, что дальше и делается довольно часто, иногда даже, когда нет неясности, с опущением слова «модуль». Должно, также, быть может еще раз указать, что, если одна из границ может быть только 0, то соответственный $y_i$ мы считаем неограниченным с этой стороны, но это имеет силу только по отношению к ф. $y_i$; в других случаях допустимы всякие конечные границы.

непересечения интегральных кривых, который, в случае 1-й категории, вообще не существует.

Точно так же, быть может не бесполезно указать, что для всех д. н. ограниченных сверху по модулю решений Д. У. (I) второй категории имеет силу классификация Birkhoff'a[1]) и устанавливаемые им некоторые общие свойства интегральных кривых, конечно, при надлежащих условиях.

§ 6. Я начну свое изучение с решений простейшего I класса, но ради точности и ясности изложения предварительно введу еще несколько новых вспомогательных понятий и определений, имея в виду, впрочем, лишь Д. У. (I) 2-й категории, к которым только и относится весь параграф.

1) Во-первых я назову систему алг. уравнений

$$\bar{y}_i\left(\bar{f}_i + \omega_i\right) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{4}$$

которая определяет координаты точек равновесия (Т. Р.), определяющей системой соответствующей системы Д. У. (I) и обозначу как (О. С.). Из общей теории интеграции Д. У. следует, что координаты всех конечных точек, к которым движущаяся точка (Д. Т.) может асимптотически приближаться, будут удовлетворять уравнениям той же (О. С.).[2]) Так как все конечные решения (О. С.) суть в то же время некоторые системы интегралов соответственных Д. У. (I), то здесь применяются все понятия приведения и можно говорить о главных и приведенных решениях системы (4) (или, что то же, о главных Т. Р. и о приведенных Т. Р.).

Последние могут быть, очевидно, тоже только пограничными точками равновесия. Начало координат будет точкой равновесия для всякой системы Д. У. (I) и первой и второй категорий. Я буду его называть «тривиальная точка равновесия».

2) Во-вторых должно указать на некоторые особенности, которые связаны с алг. характером (О. С.).

[1]) Главнейшие, мне известные, работы G. D. Birkhoff'a, касающиеся этой классификации, суть: Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques. Bull. de la S. M. de France, t. 40, Paris, 1912. — II. Über gewisse Zentralbewegungen dynamischer Systeme. Nachr. von der K. Ges. zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse, Göttingen, 1926. Также частью сюда относятся: III. Dynamicals Systems. American Mathematical Society. Colloquium Publications, vol. IX, New-York, 1927. — IV. Surface Transformations and their Dynamical Applications. Acta Mathematica, vol. 43, 1922.

[2]) Не трудно доказать, что, если по мере приближения $t$ к $\infty$ все $y_i$, кроме одного $y_j$, стремятся к определенным конечным пределам, а это одно остается по модулю ограниченным, то и оно тоже будет стремиться к определенному конечному пределу, так как в этом случае необходимо существующие max и min для этого последнего $y_j$, удовлетворяя всегда уравнению $f_j + \omega_j = 0$, делают такой вывод неизбежным, но, однако, как и все вышесказанное, при непременном условии $\alpha_j \neq 0$.

Как мы уже знаем, здесь могут иногда встречаться бесконечные решения,[1]) но также могут быть и случаи неопределенности решений, когда мы имеем не отдельные точки, но плоскости, линии и т. д. равновесия (геом. места равновесия).

Точки равновесия, в случае неопределенности решения, встречаются уже не как одна точка внутри только одного определенного угла или на его границе, но в виде известных геометрических образований, непременно в нескольких углах или на их границах, причем в некоторых они могут существовать только в конечной области, а вообще будут допускать и бесконечно-удаленные элементы, а также всегда допускают, наряду с внутренними, и пограничные точки.

Также должно (на каждой ступени приведения), исходя из решения системы: $\bar{f}_i + \omega_i = 0$ соответственных соотношений (главных), различать простые решения (и простые Т. Р.), когда в уравнениях (4) ни одна пара факторов $\bar{y}_i$ и $\bar{f}_i + \omega_i$ не равняется 0 одновременно, и кратные решения (кратные Т. Р.), где хоть в одном из уравнений (4) оба фактора одновременно обращаются в 0.

Если какая-либо система Д. У. (I) не допускает простых главных точек равновесия, т. е. если хоть одно $\bar{y}_i$ (но не все) при этом должно быть непременно равно 0, то я называю такую точку quasi-главной точкой равновесия (а соответственное решение системы (4) quasi-главным решением), а в случае неопределенности соответственное место равновесия quasi-главным местом равновесия.

Все приведенные системы Д. У. (I) могут, очевидно, иметь тоже свои quasi-главные точки и места равновесия.

Если система $n$ соотношений:

$$\bar{f}_i + \omega_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{4'}$$

может привести только к решению

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = \ldots = \bar{y}_n = 0,$$

что, конечно, требует, чтобы все $\omega_i = 0$, а основной детерминат $({}_i a_j) \neq 0$, то начало координат будет quasi-главной тривиальной точкой равновесия. Главной точкой тривиальная точка равновесия, разумеется, никогда не может быть. Все quasi-главные точки суть, очевидно, пограничные точки, так же как и все quasi-главные места равновесия. Так как ка-

[1]) Под термином «бесконечные решения» я понимаю здесь, и всюду дальше, только такие решения, где для всех (или для некоторых) $\bar{y}_i$ возможны только бесконечные значения.

ждая главная точка системы Д. У. (I) определяется $n$-соотношениями вида (4′), то мы можем считать доказанной следующую теорему.

**Теорема V.** Если основной детерминат какой-либо системы Д. У. (I) $\neq 0$, то будет существовать одна и только одна главная или quasi-главная точка, лежащая вообще внутри соответственного угла и только в случае quasi-главной точки на одной из его границ.

Для всех Д. У. (I) 2-й категории и 2-го вида — эта точка совпадает с началом координат и будет quasi-главной тривиальной точкой равновесия.

**Теорема Va.** Если $({}_ia_j)$ и матрица:

$$(a)\quad \begin{vmatrix} {}_1a_1, {}_1a_2, \cdots {}_1a_n, \omega_1 \\ {}_2a_1, {}_2a_2, \cdots {}_2a_n, \omega_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ {}_na_1, {}_na_2, \cdots {}_na_n, \omega_n \end{vmatrix},$$

не одного ранга, или, что то же, не все $\underline{\Omega}_h$ (см. формулу $(2'')$) $= 0$, то соответствующая система Д. У. (I) не допускает конечной главной точки равновесия.

Если ранг $\Delta({}_ia_j)$ и матрицы $(a)$ одинаковы, то мы имеем случай неопределенного решения (конечного).

Это следует из основных свойств лин. соотношений (4′).

В случае неопределенности, как я уже говорил, здесь существуют геометрические места точек равновесия. Так как одни из этих точек лежат на границах, другие, если мы не имеем дела с quasi-главным местом равновесия, внутри соответственных углов, то я называю такие места равновесия местами равновесия смешанного типа, различая в них главные точки и quasi-главные точки смешанного типа.

Тривиальная точка может быть тоже quasi-главной точкой смешанного типа, и в этом случае она не лежит изолированно.

Чтобы дать некоторое представление о способах разъяснения законов распределения точек равновесия, я докажу следующие теоремы:

**Теорема VI.** Если $({}_ia_j)$ и матрица $(a)$ будут ранга $n-1$, то соответственная система Д. У. (I) допускает конечные точки равновесия, и все главные точки равновесия (здесь смешан. типа) лежат на прямой;

$$(b)\qquad \bar{y}_k = {}_k\alpha_n \bar{y}_n + \Omega_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

где ${}_k\alpha_n$ имеют значения согласно формуле (2), а $\Omega_k$ — формуле $(2''')$.

Это вытекает из теории лин. алг. соотношений. Если мы попытаемся, на основе формулы (b), определить углы главного пространства $(y)$ (т. е., иначе говоря, комбинации знаков координат: $y_1, y_2, \ldots y_n$), где могут находиться места равновесия, то легко усмотреть, что для этого нужно подсчитать число различных комбинаций знаков выражений ${}_k\alpha_n \bar{y}_n + \Omega_k$ на оси $\bar{y}_n$ с учетом для $\bar{y}_n$ соответ. ему знака. Очевидно, что таким путем мы найдем maximum $n+1$ таких углов (из общего числа $2^n$). Отсюда следует такая теорема:

**Теорема VIa.** В случае теоремы VI (исключая только случай $n=1$) существует minimum $2^n-(n+1)$ углов главного пространства, где нет никаких точек равновесия.

*Замечание.* Если вместо главных или quasi-главных точек смешанного типа, иметь только quasi-главные точки, где $\lambda$ координат $\bar{y}_i=0$, то предыдущий minimum приведется к

$$2^\lambda[2^{n-\lambda}-(n+1-\lambda)],$$

причем здесь точки равновесия не будут существовать ни в самих соответствующих углах, ни на их границах.

**Теорема VIb.** Если Д. У. (I), рассматривавшиеся в теореме VIa и VI, были бы 2-го вида, то число таких углов главного пространства $(y)$, где quasi-главные точки не лежат на границах (или гл. точки внутри при $\lambda=0$), равно

$$2^n-2^{\lambda+1}$$

а число прочих углов $2^{\lambda+1}$.

*Замечание.* В этом случае прямая (b) будет иметь вид:

$$\bar{y}_k = {}_k\alpha_n y_n \qquad (k=1, 2, \ldots n-1) \tag{8'}$$

и будет проходить через начало координат, помещаясь при $\lambda=0$ вся в некоторых двух противоположных углах пространства $(y)$.

Вообще можно доказать следующее предложение.

**Теорема VIc.** Число углов, где существуют главные места равновесия смешанного типа, если таковые места существуют в конечной области, равно числу частей, на которые делится пространство с $n-r$ измерениями $(y_{r+1}, \ldots y_n)$ через $r$ плоскостей

$$0 = {}_k\alpha_{r+1} y_{r+1} + \ldots + {}_k\alpha_n y_u + \Omega_k \qquad (k=1, 2, \ldots r)$$

и $n-r$ координатных плоскостей:

$$y_{r+1} = y_{r+2} = \ldots = y_n = 0.$$

Это следует из соответствующих формул решения $n$ лин. соотношений

$$f_i + \omega_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n):$$

$$y_k = {}_k\alpha_{r+1} y_{r+1} + \ldots + {}_k\alpha_n y_n + \Omega_k,$$

так как эти формулы для каждой из таких частей пространства дают совершенно определенные, и от других отличающиеся, комбинации знаков величин $y_i$. На основании этой и подобных теорем мы всегда можем без большого труда и, во всяком случае, чисто алгебраическим (и даже элементарно-алгебраическим) путем определить расположение точек равновесия и наметить те углы, где они есть и те, где их не встречается ни внутри, ни на границах.

Я не буду приводить отдельных образцов такого определения, чтобы не увеличивать слишком размер статьи, скажу только, что для этих решений мы имеем возможность составления полного комплекса необходимых и достаточных условий их существования и при этом во всем пространстве $(y)$, чего, к сожалению, я уже не смогу сделать для следующих классов решений.

Но, однако, и для последних, как мы сейчас увидим, могут быть установлены, если не всегда достаточные, то, однако, всегда необходимые условия их существования в одних частях пространства $(y)$ и, следовательно, во многих случаях констатировано ненахождение тех или других групп решений в других частях этого пространства, которое и здесь изучается не в малых своих долях, но полностью и при этом тоже чисто-алгебраическими методами, сводящими все к только что изученной задаче о точках равновесия некоторых Д. У. (I) второй категории.

§ 7. В настоящем параграфе я именно и займусь подобными вопросами по отношению к периодическим решениям (P) для Д. У. (I) с действительными коэффициентами и периодическими одного периода дополнительными (условие $\beta$) членами,[1]) удовлетворяющими, кроме того, всюду условию $(\alpha)$, как это было оговорено и раньше.

Также все суммы $\underline{\Omega}_h$ должны быть периодическими Ф., без чего, очевидно, периодические решения невозможны (условие $\gamma$) и что равносильно требованию от $\omega_i$ быть такими, чтобы суммы средних значений (для периода) интеграндов в $\underline{\Omega}_h$ равнялись 0.

[1]) Если некоторые $\omega_i$ не удовлетворяют этим условиям, то сказанное дальше относится к соответственным приведенным системам Д. У. (I). Должно отметить, также, что при неудовлетворении условий $(\beta)$ или $(\gamma)$ никакие периодические решения невозможны. При неудовлетворении же условия $(\alpha)$ возможны прерывные периодические решения.

Для решений (P), если такие существуют, всякой системы Д. У. (I), удовлетворяющей[1]) условиям ($\alpha$), ($\beta$) и ($\gamma$), может быть доказана следующая теорема.

**Теорема VII** (теорема о средних значениях).[2]) Для всякой $n$-ого порядка системы Д. У. (I), удовлетворяющей условиям ($\alpha$), ($\beta$) и ($\gamma$), средние значения (для периода) $\overline{\omega}_i$[3]) и $\overline{\overline{y}}_i$ связаны, в случае существования решений (P) следующей системой $n$ алг. соотношений:

$$(5) \qquad \overline{\overline{y}}_i({}_ia_1\overline{\overline{y}}_1 + {}_ia_2\overline{\overline{y}}_2 + \ldots + {}_ia_n\overline{\overline{y}}_n + \overline{\overline{\omega}}_i) = 0$$

или

$$(5') \qquad y_i(\overline{f}_i + \overline{\omega}) = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Действительно, из формулы (2′) для каждого $y_j \not\equiv 0$ здесь следует:

$$0 = T({}_ja_1\overline{\overline{y}}_1 + {}_ja_2\overline{\overline{y}}_2 + \ldots + {}_ja_j\overline{\overline{y}}_j + \ldots + {}_ja_n\overline{\overline{y}}_n + \overline{\overline{\omega}}_j),$$

так как каждый $\lg(y_j : y_{0j})$ будет также некоторая непрерывная действительная периодическая функция того же периода $T$.

Отсюда следует:

$$(5'') \qquad {}_ja_1\overline{\overline{y}}_1 + {}_ja_2\overline{\overline{y}}_2 + \ldots + {}_ja_j\overline{\overline{y}}_j + \ldots + {}_ja_n\overline{\overline{y}}_n + \overline{\overline{\omega}}_j = 0$$

и уже для всякого $y_i$, в том числе и для $y_i = \overline{\overline{y}}_i = 0$, как это очевидно,

$$(5) \qquad \overline{\overline{y}}_i({}_ia_1\overline{\overline{y}}_1 + {}_ia_2\overline{\overline{y}}_2 + \ldots + {}_ia_n\overline{\overline{y}}_n + \overline{\overline{\omega}}_i) = 0.[4])$$

**Теорема VII** может быть выражена еще в следующей более наглядной форме:

[1]) И, конечно, еще условиям действительности коэф. и доп. членов, как всегда.

[2]) Эта теорема для Д. У. (I) второй категории была доказана мною еще в 1925 г. и сообщена в мартовском того же года заседании Моск. мат. общества.

[3]) Средние значения $\overline{\overline{\omega}}_i$ ф. $\omega_i$, как удовлетворяющих условию ($\alpha$), будут здесь всегда конечны и определенны, как и все $\overline{\overline{y}}_i$.

[4]) Легко усмотреть, что для средних значений комплексных периодических решений типа решений (P) можно здесь получить следующие соотношения:

$$\overline{\overline{y}}_i(\overline{f}_i + \overline{\overline{\omega}}_i - 2\pi k_i\sqrt{-1}) = 0,$$

где $k_i$ представляет целое число, выражающее разность между числами положительных и отрицательных оборотов, которые соответствующая комплексная периодическая ф. $y_i$ делает на своей плоскости около точки $y_i = 0$ в то время, как независимое переменное $t$ перемещается на своей плоскости вдоль действительного интервала

$$t_0 \ldots t_0 + T.$$

Это прямо следует из свойств ф. $\lg y_i$.

Для каждого комплексного $y_i$ мы имеем здесь $\overline{\overline{y}}_i = 0$, если $y_i = 0$, но не обратно.

**Теорема VII a.** Если мы из данной (начальная система) системы Д. У. (I) посредством замены всех дополнительных членов их средними значениями образуем некоторую новую (присоединенную)[1]) систему, то средние значения $\overline{\overline{y}}_i$, соответствующие каждому решению (P) начальной системы, будут удовлетворять той же самой системе алг. соотношений, как координаты $\overline{y}_i$ точек равновесия ее присоединенной системы (Д. У. (I)[2]), которая всегда есть система 2-й категории.

Из теоремы VIIa вытекает сейчас же такое правило знаков, на которое я в основном указал еще в моей работе V (§ 6, теорема VII).

**Правило знаков.** Все решения (P) какой-либо системы Д. У. (I), удовлетворяющей условиям ($\alpha$), ($\beta$) и ($\gamma$), могут существовать внутри (соответ. на границах) только тех углов, где находятся конечные точки равновесия присоединенной системы. Все другие углы (и их границы) будут совершенно свободны от соответственных интегральных кривых (P).

Это следует из того, что знаки $y_i$ и $\overline{\overline{y}}_i$ должны быть тождественны, а это возможно только на вышеизложенных условиях. Правило знаков позволяет во многих случаях довольно хорошо разъяснить возможные законы распределения решений (P).

*Замечание I.* Из формул ($2''$) можно видеть, что уравнения (4) для присоединенной системы, т. е. уравнения (5) для начальной, не допускают бесконечных решений, если удовлетворяется условие ($\gamma$) и обратно. Каждое бесконечное решение этих уравнений также указывает на несоблюдение условия ($\gamma$) и на невозможность каких бы то ни было периодических решений, как решение $\overline{\overline{y}}_i = 0$ на пограничное решение $y_i = 0$. Вообще, следует

[1]) Все системы Д. У. (I) второй категории и их присоединенные соответственно совпадают; также очевидно, что все точки и места равновесия начальной системы играют ту же роль и по отношению к присоединенной. Также должно отметить, что для каждой системы средних значений $\overline{\overline{y}}_i$ можно всегда найти тождественную с ней систему координат точек равновесия ($\overline{y}_i$), присоединенной системы, но не обратно, так как соответственных периодических решений может вовсе не существовать. В случае определенности решения (О. С.) для присоединенных Д. У. (I) соответствующие средние значения $\overline{\overline{y}}_i$ начальной системы Д. У. (I) совпадают с координатами точек равновесия (или, что то же, с средними значениями) для присоединенной системы. В этом случае они зависят и притом алг. только от коэффициентов Д. У. В случае неопределенности, возможна, быть может, зависимость еще от начальных значений $y_{0i}$. Но как в том, так и в другом случае мы сейчас не можем вообще судить по существованию решений (P) у присоединенной системы об их существовании у начальной и не можем ничего сказать о том числе периодических решений, которое соответствует одной определенной системе средних значений. Можно только утверждать, что сами периодические решения для начальной и присоединенной системы, если они существуют тут одновременно, будут различаться.

[2]) Можно различать, как это делается для первоначальных, и среди присоединенных главные и приведенные системы.

еще здесь отметить, что среди решений (P) мы будем отличать главные, quasi-главные и приведенные решения в соответствии с характером точек равновесия присоединенной системы.

Но и конечные решения $\bar{\bar{y}}_i$ характеризуют, даже в случае возможности, соответствующие решения (P) только суммарно, кроме некоторых специальных форм Д. У. (I) второй категории, которые мы рассмотрим во II главе, где на помощь теоремам этого параграфа приходят особые свойства этих Д. У. и связанных с ними через теорему XVIII Д. У. первой категории.

Чтобы разъяснить детальнее свойства решений (P), необходимо изучать отклонения каждой Ф. $y_i$ от ее среднего значения, но это — задача, которую мы теперь решаем очень несовершенно.

Поэтому, не желая увеличивать размер статьи ее рассмотрением, я ограничусь только выводом Д. У. для таких отклонений. Полагая, что если

$$\bar{\bar{y}}_j \neq 0,$$

$$y_j = \bar{\bar{y}}_j + \eta_j \qquad (j = 1, 2, \ldots m) \tag{6}$$

и

$$\eta_k = y_k = \bar{\bar{y}}_k = 0, \qquad (k = m+1, \ldots n)$$

что всегда можно допустить при надлежащей расстановке индексов, я буду иметь для $\eta_j$ систему из $m$ Д. У. вида:

$$\frac{d\eta_j}{dt} = (\eta_j + \bar{\bar{y}}_j)({}_j a_1 \eta_1 + {}_j a_2 \eta_2 + \ldots + {}_j a_m \eta_m + \omega_j - \bar{\bar{\omega}}_j)^{1}) \tag{6'}$$

*Замечание II.* Д. У. (6′) могут быть еще упрощены через подстановку

$$\eta_j = \bar{\bar{y}}_j \zeta_j$$

и сокращенье обеих частей на $\bar{\bar{y}}_j$, причем в этой (6″) и подобных формах Д. У. я буду обозначать, для краткости, произведения ${}_j a_k \bar{\bar{y}}_k$ как ${}_j \bar{a}_k$.

$$\frac{d\zeta_j}{dt} = (1 + \zeta_j)({}_j\bar{a}_1 \zeta_1 + {}_j\bar{a}_2 \zeta_2 + \ldots + {}_j\bar{a}_m \zeta_m + \omega_j - \bar{\bar{\omega}}_j). \tag{6''}$$

§ 8. В дальнейших изысканиях этой главы я возвращусь к периодическим решениям только на короткое время в связи с некоторыми частными вопросами, теперь же я постараюсь установить подобные предыдущим общие необходимые признаки существования, но уже для решений (V).

[1]) По аналогии с колебаниями, определяемыми лин. Д. У., можно называть решения (P) свободными колебаниями, если определять их для присоединенной системы Д. У. (I) и вынужденными, если составлять их для самой начальной системы Д. У.

Прежде, однако, я укажу те два условия $(\beta_1)$ и $(\gamma_1)$ которым, кроме условия $(\alpha)$ и здесь всегда предполагаемого, должны удовлетворять ф. $\omega_i$ для возможности существования решений (V).

1) Условие $(\beta_1)$. Так как в случае подобного решения все $y_i$, не равные 0, удовлетворяют неравенствам:

$$ {}_ib_1 \leqslant y_i \leqslant {}_ib_2,$$

то мы тут всегда имеем, как для правых, так и для левых решений:

$$ {}_ib_1(t-t_0) \leqslant \int_{t_0}^{t} y_i\,dt \leqslant {}_ib_2(t-t_0),$$

или, что то же, ${}_ib_1 \leqslant \bar{\bar{y}}_i \leqslant {}_ib_2$, где $\bar{\bar{y}}_i$ означают средние значения ф. $y_i$ для любого конечного или бесконечного интервала, т. е., средние значения $\bar{\bar{y}}_i$ будут тут всегда ограничены и сверху и снизу, но в противоположность решениям (P) они могут и не быть определенными. Функции же $\omega_i$ должны необходимо удовлетворять во всех случаях условиям $(\beta_1)$:

$$ -2\,|\lg {}_ib_1| + {}_i\beta_1(t-t_0) < \int_{t_0}^{t} \omega_i\,dt < {}_i\beta_2(t-t_0) + 2|\lg {}_ib_2|, \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

где ${}_i\beta_1$ и ${}_i\beta_2$ представляют некоторые постоянные, зависящие от ${}_jb_1$ и ${}_jb_2 (j=1, 2, \ldots n)$ и из которых одна или обе могут равняться 0 или различаться знаками. Это непосредственно вытекает из формулы (2'a).

Условие $(\beta_1)$ для достаточно больших и бесконечных интервалов $(t-t_0)$ может быть также написано в виде:

$$ -\varepsilon_i + {}_i\beta_1 \leqslant \bar{\bar{\omega}}_i \leqslant {}_i\beta_2 + \varepsilon_i$$

где $\varepsilon_i$ означают некоторые достаточно малые положительные величины.

Условие $(\gamma_1)$. Для возможности решений (V) все соответствующие суммы $\underline{\Omega}_h$ в формулах (2'') должны, очевидно, представлять при всем правом (или левом) изменении $t$ вдвойне (сверху и снизу) ограниченные функции.

Следовательно, средние значения для бесконечных интервалов $t$ сумм соответствующих интеграндов должны тут равняться 0, хотя, в противоположность решениям (P), здесь возможны случаи, когда это последнее требование удовлетворяется, но условие $(\gamma_1)$ остается не удовлетворенным.

Кроме того, тут необходимо отметить, что, по примеру проф. Volterra, я по отношению к решениям (V) буду брать средние значения для всего бесконечного промежутка: $t_0 \ldots +\infty$ (или $t_0 \ldots -\infty$), т. е.

$$ \bar{\bar{y}}_i = \lim_{t=\infty} \frac{\int_{t_0}^{t} y_i\,dt}{(t-t_0)} \quad \text{и} \quad \bar{\bar{\omega}}_i = \lim_{t=\infty} \frac{\int_{t_0}^{t} \omega_i\,dt}{t-t_0}, \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

(асимптотические средние значения) и что все дальнейшие заключения[1]) справедливы только в пределах соответственных промежутков, а не для

$$-\infty < t < +\infty,$$

как в периодических решениях. Очевидно, что и здесь равенство $\bar{\bar{y}}_j = 0$ влечет за собой равенство $y_j = 0$, как и в периодическом случае.

После этих оговорок я могу доказать следующую теорему.

**Теорема VIII** (теорема об асимптотических средних значениях). Для всякой системы Д. У. (I) n-го порядка, удовлетворяющей условиям ($\alpha$), ($\beta_1$) и ($\gamma_1$), асимптотические средние значения $\bar{\bar{\omega}}_i$ и $\bar{\bar{y}}_i$ связаны, в случае существования решений (V), системой $n$ алг. соотношений (7), подобных (5):

$$(7) \qquad \bar{\bar{y}}_i({}_ia_1\bar{\bar{y}}_1 + {}_ia_2\bar{\bar{y}}_2 + \ldots + {}_ia_n\bar{\bar{y}}_n + \bar{\bar{\omega}}_i) = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Действительно, из формулы (2'a), взятой в пределах от $t_0$ до $t$ после деления обеих частей равенства на $t - t_0$ и перехода к пределу: $t = +(\text{или} -)\infty$, мы будем иметь для всякого $y_j \neq 0$ в виду ограниченности здесь величины lg:

$$(7') \qquad {}_ja\bar{\bar{y}}_1 + \ldots + {}_ja_j\bar{\bar{y}}_j + \ldots + {}_ja_n\bar{\bar{y}}_n + \bar{\bar{\omega}}_j = 0$$

или уже для всякого $y_i$, в том числе и для $y_i = \bar{\bar{y}}_i = 0$,

$$(7) \qquad \bar{\bar{y}}_{1i}({}_ia_1\bar{\bar{y}}_1 + {}_ia_2\bar{\bar{y}}_2 + \ldots + {}_ia_n\bar{\bar{y}}_n + \bar{\bar{\omega}}_i) = 0,$$

что и требовалось доказать.[2])

Параллельно первой редакции VIII, она может быть и здесь изложена в более наглядной форме VIIIa, если ввести подобно § 7 понятие о присоединенной системе Д. У. (I), образуемой путем замены всех $\omega_i$ их асимптотическими средними $\bar{\bar{\omega}}_i$.

**Теорема VIIIa.** Асимптотические средние значения $\bar{\bar{y}}_i$, соответствующие каждому решению (V) начальной системы Д. У. (I) будут удовлетворять, той же самой системе алг. соотношений, как координаты $\bar{y}_i$ точек равновесия ее присоединенной[3]) системы. $\overline{\overline{\text{Д. У. (I)}}}$.

[1]) Не трудно видеть, что удовлетворение условий ($\beta$) и ($\gamma$) предыдущего параграфа влечет за собой удовлетворение условий ($\beta_1$) и ($\gamma_1$), и что вообще для периодических функций средние их значения для периода и их асимптотические средние значения совпадают. Также легко усмотреть, что в случае подобных периодич. $\omega_i$ системы уравнений (5) и (7) также вполне совпадают, так что в этом случае средние значения $\bar{\bar{y}}_i$ для возможных решений (P) могут не отличаться от асимптотических средних значений, соответствующих, быть может, также иногда возможным наряду с первыми решениям (V).

[2]) Для Д. У. (I) второй категории уже в самых первых своих работах проф. Volterra доказал наличность равенства (7) для соответствующих решений, не устанавливая, впрочем, понятия о приведенных решениях (V).

[3]) Присоединенные системы здесь будут вообще различные для правого и левого изменения.

*Замечание.* Между теоремами VIII и VII существует таким образом полная аналогия и даже в случае постоянных или периодических $\omega_i$ почти полное совпадение, но однако не следует упускать из виду и возможные различия, происходящие от того, что асимптотические средние $\bar{\bar{\omega}}_i$ (равно как и сами $\bar{\bar{y}}_i$), будучи в рассматриваемых случаях всегда ограничены, могут, однако, и не быть вполне определенными, завися от способа стремления $t$ к $\infty$, а также должно иметь в виду, что иногда при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$ могут быть получены две различных присоединенных системы.

Если хоть одно $\bar{\bar{\omega}}_i$ не имеет этой определенности, то непременно хоть одно $\bar{\bar{y}}_i$ в каждом главном решении (V), которые мы, наряду с quasi-главными и просто приведенными решениями, различаем и здесь по примеру решений (P), будет тоже неопределенным, что возможно даже и в случае определенности, если соответствующая (О. С.) присоединенной системы Д. У. сама не решается определенно. В этом случае возможна, однако, и полная определенность всех $\bar{\bar{y}}_i$, но уже соединенная с зависимостью их не только от коэф. Д. У., но и от начальных данных.

Если же все $\bar{\bar{\omega}}_i$ определенны и О. С. присоединенных Д. У. тоже решается определенно, то все $\bar{\bar{y}}_i$ решений (V), если, конечно, такие существуют, будут всегда определенными и независящими от нач. данных, но только от коэф. уравнений. Бесконечные решения О. С. указывают и здесь на несоблюдение условия $(\gamma_1)$ и, следовательно, на невозможность соответственных решений (V), но тут условия $(\gamma_1)$ могут иногда не соблюдаться и при конечных решениях О. С.

Следует заметить, что в случае неопределенности $\bar{\bar{\omega}}_i$ мы собственно должны рассмотреть не одну, а несколько (и даже, б. м., бесконечно много) присоединенных Д. У.) (I) и о возможности соответственных решений (V) вообще или в какой-либо части соответственного пространства $(y)$ судить по результатам[1]) исследования для каждой из них, так что невозможность

[1]) В одном простейшем случае, когда можно выбрать хоть одно $\omega_k$ так, что все отношения

$$\int_{t_0}^{t} \omega_i\, dt : \int_{t_0}^{t} \omega_k\, dt$$

для $t \to \infty$ стремятся к определенным конечным пределам, а сам $\int_{t_0}^{t} \omega_k\, dt \to \infty$, то, деля обе части формулы (2′a) не на $t - t_0$, как это сделано при доказательстве теоремы VIII, но на

$$\int_{t_0}^{t} \omega_k\, dt$$

таких решений, хотя при одном из значений $\bar{\bar{\omega}}_i$, влечет общую их невозможность. Эти обстоятельства делают, конечно, исследования более сложными.

Также и здесь мы имеем следующее правило знаков.

**Правило знаков.** Все правые (или левые) решения (V) какой-либо системы Д. У. (I), удовлетворяющей условиям $(\alpha)$, $(\beta_1)$, $(\gamma_1)$, могут существовать внутри (соответ. на границах) только таких углов, где находятся конечные точки равновесия присоединенной системы (или каждого представителя семейства присоединенных). Все другие углы (и их границы) будут совершенно свободны от соответственных правых (или левых) интегральных кривых (V).

В соответственных случаях может существовать свобода от всяких решений (V).

Это следует из совпадения знаков $y_i$ и $\bar{\bar{y}}_i$ и в данном случае также из необходимости иметь $y_i = 0$, если $\bar{\bar{y}}_i = 0$.

*Замечание.* В случае постоянных или периодических $\omega_i$, удовлетворяющих также условиям $(\alpha)$ и $(\gamma)$, все углы пространства $(y)$ делятся, таким образом, на те, где возможны решения (P) и решения (V) и те, где ни те, ни другие не возможны.

Если же $\omega_i$ не периодичны, но условия $(\alpha)$, $(\beta_1)$ и $(\gamma_1)$ удовлетворяются, то решений (P) вообще нет, и все углы делятся на такие, где возможны решения (V) (правые или левые) и такие, где их не может быть.

§ **9.** Нечто подобное, как оказывается, может быть, конечно, всегда при соблюдении доп. членами $\omega_i$ условий $(\alpha)$, установлено и для решений (A), которых интегральные кривые тоже или лежат, для всего правого (или левого) изменения $t$, совершенно внутри, или всегда на границах соответствующих их начальным координатам углов, но в отличие от решений двух предыдущих классов непременно будут, находясь внутри угла, подходить

и переходя к пределу, мы можем делать выводы, подобные предыдущим, но только в них роль $\bar{\bar{y}}_i$ и $\bar{\bar{\omega}}_i$ будут играть пределы отношений:

$$\frac{\int_{t_0}^{t} y_i\,dt}{\int_{t_0}^{t} \omega_k\,dt} \quad \text{и} \quad \frac{\int_{t_0}^{t} \omega_i\,dt}{\int_{t_0}^{t} \omega_k\,dt},$$

что нас избавит от необходимости рассматривать целое семейство присоединенных.

В этом случае система Ф.: $\int_{t_0}^{t} \omega_i\,dt$ представляет по моей терминологии систему Ф. с правильным ходом в бесконечности. См. мою работу (VI): «Об особенностях интегралов системы алг. диф. ур-ний основной формы. Статья I. Моск. мат. сб., т. 29, вып. 4, 1915 г.», особенно там гл. II, § 2.

произвольно близко к его границам или уходить произвольно далеко от начала координат или то и другое поочередно. Поэтому, тоже в отличие от §§ 7 и 8, равенство $\bar{y}_i = 0$ для какого-либо бесконечно-большого интервала может здесь и не влечь за собой равенства $y_i = 0$, о чем далее я буду подробнее говорить.

Но в своей центральной области каждое решение (A) будет обладать свойствами решений (V) в том смысле, что тут все правые (или левые) значения $y_i$ (в главном или приведенных решениях) будут удовлетворять неравенствам:

$$0 < {}_ib_1 < |y_i| < {}_ib_2 < \infty$$

где ${}_ib_1$ и ${}_ib_2$ две надлежаще, хотя в известной степени и произвольно, выбранные постоянные величины, которые таковы, что для величины суммы $\sum {}_ib_2$, нижний, а для суммы $\sum {}_ib_1$ верхний пределы или тот и другой вместе никогда нельзя так выбрать, чтобы для достаточно больших $t$ были совершенно исключены неравенства:

$${}_ib_2 < |y_i|, \quad \text{или} \quad |y_i| < {}_ib_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

или те и другие вместе.

Отсюда следует, что решение (A) будет спорадически ограниченным сверху и снизу для бесконечно многих правых (или левых), удаляющихся в $\infty$ $t$-интервалов $\theta_k$ (интервалы ограниченности решения), не соприкасающихся друг с другом, но отделенных промежутками неограниченности сверху и снизу или иногда только с одной какой-либо стороны. Чтобы решения (A) могли существовать, доп. члены $\omega_i$ должны так же, как это было в §§ 7 и 8, удовлетворять, кроме условий ($\alpha$), еще следующим двум:

1) Условие ($\beta_2$). Если какая-либо система Д. У. (I) допускает главное (или соответ. приведенное) решение (A), то каждый $\int_{t_0}^{t} \omega_i\, dt$ в каждом $t$ — интервале ограниченности $\theta_k = {}_2t_k - {}_1t_k$ будет лежать между двумя границами:

$$-2\,|\lg({}_ib_1)| + {}_i\beta_1(t_2 - t_1) \quad \text{и} \quad {}_i\beta_2(t_2 - t_1) + 2\,|\lg({}_ib_2)|,$$

где

$$|{}_2t_k| \geqslant |t_2| \geqslant |t_1| \geqslant |{}_1t_k| \quad \text{и} \quad {}_i\beta_1,\ {}_i\beta_2$$

означают некоторые постоянные, зависящие от ${}_jb_1$ и ${}_jb_2$ $(j = 1, 2, \ldots n)$, величины, которые могут отличаться по знаку друг от друга, и из которых одна или обе могут равняться 0.

Это условие вытекает из спорадической ограниченности Ф. $y_i$, причем оно, конечно, может выполняться и для интервалов $> \theta_k$.

2) Условие $(\gamma_2)$. Для возможности решений (A) все соответствующие суммы $\underline{\Omega}_h$ в формулах $(2'')$ должны, очевидно, представлять во всех $\theta_k$ или больших[1]) интервалах, т. е., спорадически (иногда даже постоянно), ограниченные сверху и снизу функции. Удовлетворение условий $(\alpha)$, $(\beta_2)$ и $(\gamma_2)$ предполагается всюду далее. Важно также отметить, что, если условия $(\beta)$, $(\gamma)$ или $(\beta_1)$, $(\gamma_1)$ удовлетворены, то и условия $(\beta_2)$, $(\gamma_2)$ тоже.

Чтобы теперь вывести необходимые условия существования для решений (A), которые в общем весьма схожи с подобными же условиями для решений (P) и (V), я должен предварительно установить понятие спорадически-асимптотических средних значений (с. а. средн. значений) функций.

Под этим я подразумеваю для какой-либо функции $\psi$ следующий предел $\bar{\bar{\psi}}$:

$$\bar{\bar{\psi}} = \lim_{t \to \infty} \frac{\int_{t_0}^{t} \psi dt}{t - t_0},$$

где $t$ в своем (правом или левом) стремлении к $\infty$, принимает только такие значения, которые соответствуют интервалам ограниченности

$$\theta_k (k = 1, 2, \ldots + \infty \quad \text{или} \quad k = -1, -2, \ldots -\infty).$$

Такие с. а. средние значения[2]) могут быть или вполне и однозначно определенными (конечные или бесконечные) или оказаться неопределенными в смысле возможности конечного или даже бесконечного множества значений в зависимости от способов подхода $t$ к $\infty$.

Из этого определения следует, что $\int_{t_0}^{t} \psi dt$, в случае, что с. а. среднее $\bar{\bar{\psi}} \neq 0$, одновременно с $t$ может делаться, а, если $\psi$ нигде не меняет знака, то и делается бесконечно-большим, так что условия $(\gamma_2)$ требуют здесь равенства 0 всех с. а. средних значений интегралов сумм $\underline{\Omega}_h$, но не обратно.

[1]) Уместно, может быть, указать, что интервалы $\theta_k$ для Ф. $\omega_i$ определяют до известной степени подобные же интервалы для $y_i$, но с возможностью для последних быть и меньше первых, как периоды $\omega_i$ — периоды соответственных решений (P).

[2]) Не трудно видеть, что для всех периодических Ф. или вообще для Ф. с определенными асимптотическими средними значениями, эти последние совпадают с их с. а. средними значениями, вычисляемыми по предыдущему правилу, в случае же неопределенности с. а. средние значения могут совпадать только с частью возможных значений соответствующих асимптотических средних в зависимости от больших или меньших размеров интервалов $\theta_k$

Наибольшая разность с предыдущими параграфами заключается для решений (А) в том, что тут $\bar{\bar{\omega}}_i$ и $\bar{\bar{y}}_i$ могут быть и $\infty$, и в том, что равенство $\bar{\bar{y}}_i = 0$ не влечет тут, как это очевидно, непременно следствие $y_i = 0$, хотя подобное, как мы дальше увидим, все-таки имеет место в некоторых случаях, но вообще здесь мыслимы такие решения (А), что соответственная движущаяся точка (Д. Т.) проходит, бесконечно часто, бесконечно близко к соответственной границе, но решение не есть пограничное, хотя $\bar{\bar{y}}_i = 0$. Ради этой последней разницы я формулирую здесь теорему IX только для главных решений (А).

**Теорема IX** (теорема о спорадических асимптотических средних значениях). Для всякой системы Д. У. (I) $n$-го порядка, удовлетворяющей условиям $(\alpha)$, $(\beta_2)$, $(\gamma_2)$ спорадически асимптотические средние значения $\bar{\bar{\omega}}_i$ и $\bar{\bar{y}}_i$[1]) связаны, в случае существования главного решения (А), системой $n$ линейных соотношений вида:

$$(8) \qquad {}_ia_1\bar{\bar{y}}_1 + {}_ia_2\bar{\bar{y}}_2 + \ldots + {}_ia_n\bar{\bar{y}}_n + \bar{\bar{\omega}}_i = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Действительно, из формулы (2'а) через деление обеих ее частей на $t - t_0$ и устремление $t$ к пределу: $+\infty$ или $-\infty$ путем прохождения только значений $t$ внутри промежутков $\theta_k$ получатся как раз соотношения (8), если заметить, что для решений (А) $\lg(y_i)$ внутри промежутка $\theta_k$ всегда ограничены. Наряду с теоремой IX можно и здесь иметь ее еще в следующей редакции, подразумевая под присоединенной ту систему Д. У. (I), которая получается из начальной путем замены всех $\omega_i$ их с. а. средними $\bar{\bar{\omega}}_i$.

**Теорема IXа.** Спорадически асимптотические средние значения $y_i$, соответствующие каждому решению (А) начальной системы Д. У. (I), если такие решения существуют, будут удовлетворять той же самой системе алг. соотношений, как координаты $\bar{\bar{y}}_i$ точек равновесия ее присоединенной системы $\overline{(\text{Д. У. (I)})}$:

$$(8') \qquad \bar{\bar{y}}_i({}_ia_1\bar{\bar{y}}_1 + {}_ia_2\bar{\bar{y}}_2 + \ldots + {}_ia_n\bar{\bar{y}}_n + \bar{\bar{\omega}}_i = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

*Замечание.* Но здесь только каждому простому решению уравнений (8') будут соответствовать такие решения (А), что при $\bar{\bar{y}}_i = 0$ и $y_i = 0$, т. е., только простым приведенным точкам равновесия присоединенной системы соответствуют и приведенные решения (А). В случае кратных решений решения (А) с $\bar{\bar{y}}_i = 0$ могут, как было указано выше, и не быть пограничными, но знаки $y_i$ и $\bar{\bar{y}}_i$ и здесь всегда совпадают для $\bar{\bar{y}}_i \neq 0$.

[1]) При этом та система интервалов $\theta_k$, для которой выводятся средние значения $\bar{\bar{\omega}}_i$, будет предполагаться совпадающей с подобной же системой для $\bar{\bar{y}}_i$, но последние интервалы иногда могут быть только частями первых.

В соответствии с этим я буду далее различать главные решения (A), quasi-главные, если хоть одно $\bar{\bar{y}}_i = 0$, и вполне или частью приведенные quasi-главные решения (A), если при этом все или часть соответствующих $y_i = 0$. Только такие приведенные quasi-главные решения (A) будут пограничными.

Также легко заметить, что система (8′) для всех конечных с. а. средних $\bar{\bar{\omega}}_i$ от $\omega_i$, удовлетворяющих условию $(\gamma_2)$, будет всегда допускать только конечные решения, так что наличность лишь бесконечно-удаленных точек равновесия (точнее бесконечно-больших решений системы (8′)) у присоединенной системы с конечными $\bar{\bar{\omega}}_i$ указывает на невозможность соответственных решений (A).

Неопределенность или бесконечность $\bar{\bar{\omega}}_i$ требует непременно неопределенности или бесконечности хоть некоторых $\bar{\bar{y}}_i$. При определенности $\bar{\bar{\omega}}_i$ и определенности соответственного решения уравнений (8′) значения $\bar{\bar{y}}_i$ вполне определены и зависят только от коэф. уравнений, при неопределенности же решений (8′) в этом случае возможна, быть может, и определенность их, но соединенная с зависимостью не только от коэф., но еще от нач. данных.

При неопределенности [1]) $\bar{\bar{\omega}}_i$ мы имеем собственно целые семейства присоединенных Д. У. (I) и здесь, благодаря возможности уменьшить промежутки (для $y_i$) $\theta_k$ и тем исключить ряд значений $\bar{\bar{\omega}}_i$, о невозможности решений (A) можно заключить только, если ни одной из присоединенных таким образом систем эти решения не указываются как возможные.

В случае приведенных решений (A) достаточно рассматривать приведенную присоединенную систему Д. У. (I). Вместо семейств присоединенных можно и здесь, подобно § 8, рассматривать в некоторых случаях только единственные присоединенные системы.

Здесь мы также имеем правило знаков, хотя и с некоторым различием от предыдущих по отношению к quasi-главным решениям (A).

**Правило знаков.** Все интегральные кривые (правые или левые) для решений (A) какой-либо системы Д. У. (I) с кон. $\bar{\bar{\omega}}_i$ и удовлетворяющей условиям $(\alpha)$, $(\beta_2)$ и $(\gamma_2)$, если такие решения существуют, могут лежать внутри (или соответ. на границах) только тех углов, где находятся конечные точки равновесия присоединенной системы,[2]) исключая только такие

[1]) Если хоть одно $\bar{\bar{\omega}}_i = \infty$, то собственно применение предыдущих методов, кроме некоторых особых случаев, невозможно. Оно, очевидно, весьма осложняется и для случая неопределенности $\bar{\bar{\omega}}_i$.

[2]) В случае неопределенности $\bar{\bar{\omega}}_i$, те углы (и их границы), где хоть для одной системы значений $\bar{\bar{\omega}}_i$, необходимые условия существования решения (A), т. е., иначе говоря, нужная

угловые границы главного (или приведенного) пространства, где находятся quasi-главные точки равновесия и где соответственно quasi-главные решения (A) могут существовать, быть может, не на границах, но внутри углов с бесконечно-частым подходом к этим границам при правом (или левом) стремлении $t$ к $\infty$.

К сожалению, мне до сих пор не удалось полностью разобрать вопрос о таких quasi-главных решениях (A), так что здесь приходится довольствоваться пока только некоторыми частными выводами.

**Теорема X.** Если какая-либо система Д. У. (I), удовлетворяющая условиям $(\alpha)$, $(\beta_2)$ и $(\gamma_2)$ и еще дополнительному условию $(\alpha')$, что все $(\omega_i)$ для $t \to \infty$ ограничены сверху, такова, что ее присоединенная не допускает внутри некоторого угла главных мест равновесия, а имеет quasi-главное место равновесия ($\bar{y}_l = 0$ и $u_l = 0$) на его границе и такое, что

$$\int_{t_0}^{t} \Omega_l \, dt$$

(см. формулу $(2''''')$), является для $t \to \infty$ ограниченным сверху по модулю, хотя бы только и спорадически внутри соответственных интервалов $\theta_k$ и, следовательно, там же $\bar{\Omega}_l = 0$, то здесь не может существовать никакого другого типа решений (A), кроме вполне приведенного quasi-главного решения.

Действительно, для каждого главного или quasi-главного решения (A) соответственная сумма $\int_{t_0}^{t} (y_l - u_l)\, dt - \int_{t_0}^{t} \Omega_l \, dt$ должна быть всегда спорадически ограничена сверху и снизу в силу формулы $(2''''')$, а потому каждый соответственный $\int_{t_0}^{t} y_l \, dt$, который представляет для решения (A) некоторую монотонную Ф., должен быть здесь при $t \to \infty$ всегда сверху и снизу ограниченным, если он не равняется 0, как это будет в случае приведенности.

Но такая двойная ограниченность может, очевидно, иметь место только под условием, что сумма $\sum_{0}^{m} {}_j \bar{\theta}_j \, (m \to \infty)$ промежутков времени

$$\bar{\theta}_j = t_{j+1} - t_j$$

комбинация знаков $\bar{y}_i$, соблюдается, будут по нашей терминологии углами возможного существования решения (A), а те углы, где ни для одной из таких систем $\bar{\omega}_i$, подобное невозможно, будут, несомненно, лишены таких решений. Все это потому, что интервалы $\theta_k$ могут быть при нужде уменьшаемы с исключением таким образом всех неподходящих значений $\bar{\omega}_i$.

(или для $t \to -\infty$ $\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_{-1}, \bar{\theta}_{-2}, \ldots$), вне которых соответственная Ф. $y_l$ всегда удовлетворяет неравенству $|y_l| \leq \varepsilon_l$, где $\varepsilon_l$ представляет произвольно вперед выбираемую, достаточно малую положительную величину, будет конечной. Но тогда все интервалы $\bar{\theta}_j$ с достаточно большими индексами можно предполагать произвольно малыми, и, следовательно, на основании формулы (3) можно заключить, что при нахождении движущейся точки (Д. Т.) в соответственной конечной области: $\Sigma |y_i| \leq A$, где $A$ означает некоторый, большой, но произвольно определенный предел, отход этой точки от начального (и конечного) в промежутке $\bar{\theta}_j$ положения: $|y_l| = \varepsilon_l$ возможен только так, что такое отклонение будет меньше или равно $\varepsilon_l(1 + \varepsilon)$, где $|\varepsilon|$ является произвольно малым, зависящим от выбора величины интервала $\bar{\theta}$ (подразумевая под $\bar{\theta}$ наиб. из всех $\bar{\theta}_j$ с достаточно большим $j$) пределом, но тогда, действительно, имея, при достаточно большом $t$, $\varepsilon_l(1 + \varepsilon)$ в роли высшего предела отхода от положения $y_l = 0$, мы будем иметь для движущейся точки (Д. Т.) невозможность после достаточно большого, истекшего после момента $t = t_0$, промежутка времени, (т. е. если индекс $j$ при $\bar{\theta}_j$ достаточно велик) попадать в центральную область, так как $A$ и $\varepsilon_l$ $(1 + \varepsilon)$ всегда можно наперед выбрать так, чтобы при $\Sigma |y_i| \geq A$ или $|y_l| < \varepsilon_l$ $(1 + \varepsilon)$ точка (Д. Т.) была вне центральной области.

Но это несовместимо с определением решения (А), что и доказывает теорему, оставляя возможным только соответственно приведенное решение (А).

*Замечание I.* Теорема, очевидно, остается справедливой, если мы имеем не только $\bar{\bar{y}}_e = 0$, но и еще несколько подобных равенств.

*Замечание II.* Если мы имеем какую-либо систему Д. У. (I), удовлетворяющую условиям $(\alpha)$, $(\beta_2)$, $(\gamma_2)$ и $(\alpha')$ и такую, что все $\int_{t_0}^{t} \omega_i \, dt$ для $t \to \infty$ тоже ограничены сверху по модулю, хотя бы и спорадически (т. е., следовательно, все $\bar{\bar{\omega}}_i = 0$), то здесь не может существовать никакого другого неприведенного решения (А) начальной системы Д. У. (I), кроме тривиального решения:

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0,$$

если присоединенная система соответственно допускает только тривиальную Т. Р.

Это прямо следует из теоремы X.

Кроме того, мы можем доказать еще следующую теорему.

**Теорема XI.** Если в предыдущем замечании, не предполагая ограниченности самих $\omega_i$, предположить ограниченность (уже не спорадическую только) всех $\int_{t_0}^{t} \omega_i\, dt$, то вывод, сделанный в замечании II, остается тоже в силе.

Чтобы это доказать, я устанавливаю, на основании того, что тут $u_k = 0$, и формулы $(2^{IIII})$, что здесь все $\int_{t_0}^{t} y_i\, dt$ в случае существования решений (A) должны представлять уже не спорадически, а, как монотонные Ф., всегда сверху по модулю ограниченные функции, причем, кстати сказать, $t_0$ здесь соответствует некоторому моменту нахождения в центральной области. Но из уравнений (2′a) следует, что в данном случае minimum один (и даже два) $\int_{t_0}^{t} y_i\, dt$ должны при $t \to \infty$ переходить через произвольно большие по модулю значения, ибо каждый раз перед вступлением в центральную область (или после удаления из нее) хоть один $\lg(y_j|y_{0j})$ должен приближаться к $-$ или $+\infty$ при $t \to \infty$, что противоречит выводу предыдущего абзаца и таким образом доказывает теорему.

Наряду с теоремами X и XI могут быть установлены и более общие теоремы подобного же содержания, например:

**Теорема Xa.** Если система Д. У. (I) удовлетворяет условиям $(\alpha)$, $(\beta_2)$, $(\gamma_2)$ и $(\alpha')$ и существует хоть одна линейная комбинация $y_i$ вида:

$$\alpha_i \int_{t_0}^{t} y_i\, dt + \alpha_2 \int_{t_0}^{t} y_2\, dt + \ldots + \alpha_n \int_{t_0}^{t} y_n\, dt = \sum \beta_i \lg(y_i|y_{ci}) + \int_{t_0}^{t} \Omega\, dt,$$

где $\alpha_i$ и $\beta_i$ суть некоторые постоянные коэф., а соответствующий $\int_{t_0}^{t} \Omega\, dt$ представляет спорадически (или постоянно) сверху и снизу ограниченную Ф. при $t \to \infty$, то в угле, где все неравные 0 $\alpha_i y_i$ одного знака, или на его границах, невозможны никакие решения (A), кроме вполне приведенных по отношению к таким $y_i$.

Доказательство во всем существенном только повторяет доказательство теоремы X.

*Замечание.* В случае постоянства или периодичности $\omega_i$, удовлетворяющих условиям $(\alpha)$, $(\beta)$ и $(\gamma)$, решения (A) могут таким образом существовать только в тех углах, где возможны решения (P) и (V), с некоторым

отличием от последних лишь в поведении quasi-главных решений, отличием, которое, однако, при условиях теорем X, XI и X a пропадает. Здесь также возможны случаи полного совпадения средних значений для всех 3 типов решений, и всегда существует совместность правых и левых решений в одном угле, поскольку такие решения возможны.

В случае соблюдения доп. членами $\omega_i$ только условий $(\alpha)$, и $(\beta_1)$ $(\gamma_1)$ будет наблюдаться подобный предыдущему закон совместности расположения в одинаковых углах уже только для правых (или левых) решений (V) и (A), тоже с некоторым отличием для quasi-главных решений (A) и в случае неопределенности $\overline{\overline{\omega}}_i$ с возможностью для решения (A) существовать и в некоторых лишних углах. Решения (P) здесь вообще невозможны. В случае определенности всех $\overline{\overline{\omega}}_i$ и решения (О. С.) для присоединенной системы Д. У. (I) самые средние значения всех этих решений совпадают. При несоблюдении условий $(\beta_1)$ или $(\gamma_1)$, речь может итти только о решениях (A), распределяемых с соблюдением указанного в этом параграфе правила знаков.

Там же, где не соблюдаются даже условия, $(\beta_2)$, $(\gamma_2)$ можно говорить,[1]) как о непрерывных решениях только о (B). В случае решений (A) будут возможны, совершенно аналогично предыдущим типам решений, такие системы Д. У. (I), когда при определенных $\overline{\overline{\omega}}_i$ средние значения $\overline{\overline{y}}_i$ будут вполне определенны и зависят только от коэф. уравнений, а также и случаи, когда возможна зависимость и от начальных данных или же неопределенность, всегда неизбежная при неопределенности значений $\overline{\overline{\omega}}_i$.

§ **10.** Нам остается теперь рассмотреть последнюю группу действительных непрерывных решений: решения (B).

В этом случае мы не имеем ничего аналогичного соотношениям (5), (6) и (7) и ничего, что играло бы роль, подобную средним, асимптотически средним и спорадически асимптотическим средним §§ 7, 8 и 9, и никакая система Д. У. (I) не занимает здесь места присоединенной системы этих параграфов, хотя в некоторых случаях решений (B) функции $y_i$ обладают конечными (а иногда и бесконечными) асимптотическими средними.

Поэтому в данный момент, если не считать некоторых особых углов и систем Д. У. (I) главы II или особых областей пространства $(y)$, о кото-

[1]) Или о прерывных решениях, возможность существования которых вообще никогда нами не исключается, как и решений (B). Причем должно заметить, что под прерывными мы здесь подразумеваем такие решения, которые делаются при подходе $t$ к $\infty$, т. е., бесконечно часто прерывными, тогда как те решения, которые испытывают прерывность только для значений $t$ в некоторой конечной области, а дальше делаются непрерывными, входят в классы право (или лево) непрерывных решений.

рых я скажу несколько слов в конце настоящей главы, и где мы сможем в известных границах установить достаточные условия существования некоторых решений, мы должны считать возможность существования интегральных кривых типа (B) не исключенной (конечно, как всегда, при предположении, что условия ($\alpha$) удовлетворяются) ни для какого угла или его границ, так что углы, где необходимые условия существования решений (P), (V) и (A) не удовлетворяются, будут углами, где из действительных непрерывных решений возможны только решения (B) в противоположность прочим углам, где возможно еще существование действительных непрерывных (право или лево) решений и других, даже всех четырех первых классов.

Вопрос о прерывных (для конечных значений $t$) решениях в настоящей статье не ставится, но они собственно в промежутке от одной точки прерывности до другой дают интегральные кривые, уходящие непременно и там и тут в бесконечность и притом по способу решений (B), но не (A), и в каждом вообще углу могут быть сейчас предполагаемы, как дополнение к непрерывным решениям, опять за исключением иногда некоторых особых частей пространства ($y$) или особых групп Д. У. (I), как это будет указано дальше.

Во всяком случае предыдущие результаты позволяют для многих классов Д. У. (I) в значительной мере разъяснить законы распределения интегральных кривых, соответствующих д. н. (право или лево) решениям.

Так мы можем, очевидно, считать доказанной следующую теорему.

**Теорема XII.** Если мы имеем систему Д. У. (I) с коэф. ${}_ia_j$ такого рода, что ни основной $\Delta$, ни один из его миноров любого порядка $\neq 0$, где $\omega_i$ таковы, что все условия ($\alpha$), ($\beta$), ($\gamma$) или ($\alpha$), ($\beta_1$), ($\gamma_1$) (соотв. ($\beta_2$), ($\gamma_2$)) удовлетворяются, и при $t \to \infty$ все $\bar{\bar{\omega}}_i = 0$, то эта система Д. У. (I) не допускает нигде каких-либо других д. н. решений, кроме решений (B). В случае, если основной $\Delta \neq 0$, но не его миноры, подобный вывод имеет силу, по крайней мере, для главного решения.

Следствие. Следовательно здесь можно сказать, по отношению к главному и всем приведенным или, в случае миноров $= 0$, только к главному пространству, что любая, наперед выбранная, центральная область какого-либо угла по истечении некоторого конечного промежутка времени [1])

[1]) В случае Д. У. (I) второй категории величина этого промежутка будет зависеть только от начальных координат соответствующего ряда движущихся точек (Д. Т.) (собственно некоторой одной из них). Удаление же будет всегда иметь место при обоих способах изменения.

будет свободна от движущихся с момента $t_0$ по непрерывным законам точек (Д. Т.), ибо движения (вправо или влево) типа (В) выносят точки (Д. Т.) или в $\infty$ или прижимают к границам углов. Центральные части таких углов, при отсутствии прерывных решений, будут в конечный срок совершенно освобождаться от движущейся точки (конечно, имея в виду только одностороннее изменение, но при $\omega_i$ постоян. или периодич. и двухстороннее).

*Замечание.* Подобную же картину мы имеем и для всяких Д. У. (I) в углах, где невозможны д. н. решения, кроме (В).

В случае, когда не все $\overline{\overline{\omega}}_i = 0$, но все остальные условия теоремы XII соблюдаются, можно установить следующее:

**Теорема XII a.** В только что указанных условиях неравного 0 основного детерминанта и всех его миноров могут существовать наряду с решениями (В) также решения предыдущих классов, если соблюдение условий $(\beta_i)$, $(\gamma_i)$ $(i = 1, 2)$ или $(\beta)$, $(\gamma)$ это позволяет, но не больше, чем в одном из углов главного и каждого из приведенных пространств $(y)$ при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$.

*Замечание.* Здесь предыдущее следствие будет относиться уже только ко всем остальным углам, кроме этих одних.

Вышесказанным я окончу сейчас свое изложение возможно общих законов (необходимых условий существования) для д. н. интегральных кривых Д. У. (I), которые мне удалось установить, но прежде чем я перейду к рассмотрению некоторых достаточных, но более частных законов их существования, иногда в связи с аналитической формой зависимости от $t$, я сделаю для случая аналитических Д. У. (I) одно замечание, относящееся к одному из видов подобной зависимости, но уже для прерывных, вообще комплексных, решений вблизи одного типа, так называемых особых точек.

§ 11. Именно я рассмотрю случай, когда соответственная система Д. У. (I) допускает такую особую точку $t_1$, что все $y_i$ (а также и $\omega_i$) способны внутри некоторого кругового кольца с центром в этой точке (на плоскости $t$) разлагаться в ряд Лорана.

Легко доказать, что так называемые вычеты Ф. $y_i$ для главного решения будут тут удовлетворять алг. линейным соотношениям, по своему строению очень схожим с теми, которым удовлетворяют средние значения главных решений (P), (V) и (A) и особенно средние значения комплексных периодических решений (см. § 7).

Действительно, если обозначить коэф. при $(t - t_1)^{-1}$ (вычеты) в соответственных разложениях Ф. $y_i$ соответственно через $\widehat{\overline{y}}_i$, а Ф. $\omega_i$ через $\widehat{\overline{\omega}}_i$, то из Д. У. (2′) после интеграции почленно по круговому контуру с цен-

тром в $t_1$ и замечая, что $\lg(y_i|y_{0i})$ в этих условиях будет равен $2\pi\nu_i\sqrt{-1}$, где $\nu_i$ есть целое число, показывающее разность чисел положительных и отрицательных оборотов Ф. $y_i$ около начала координат своей плоскости, когда переменное $t$ описывает окружность интеграции, мы получим по сокращении на $2\pi\sqrt{-1}$:

$$\nu_i = {}_ia_1\bar{\bar{y}}_1 + {}_ia_2\bar{\bar{y}}_2 + \ldots + {}_ia_n\bar{\bar{y}}_n + \bar{\bar{\omega}}_i, \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

что и требовалось доказать.

Я не буду дальше останавливаться на этих соотношениях или на вопросе об определении других коэф. рядов Лорана, но укажу только, что подобные же соотношения имеют силу и для разложений около полюсов, когда $-\nu_i$ будет просто обозначать порядок полюса соответ. Ф. $y_i$, который, вообще $\leq l$, лишь иногда $> l$[1]), где $l = \max$ порядка полюсов $\omega_j$, но всегда не $< 1$.[2])

**§ 12.** После систематического общего обзора действительных непрерывных решений, сделанного в §§ 6—10, я займусь сейчас более детальным рассмотрением некоторых особых частей пространства $(y)$, а именно его бесконечно удаленных частей, а также частей, находящихся в непосредственном соседстве с точками равновесия (т. е., с началом координат, пограничными и главными подобными точками), чтобы хотя для некоторых частных типов Д. У. (I) (в случае главных точек всегда Д. У. 2-й категории) установить не только необходимые, но и достаточные условия существования там д. н. решений особенно типов (B) и (V) и указать, где возможно, на их здесь аналитические формы.

В этом направлении может быть доказана следующая теорема.

**Теорема XIII.** Д. У. (I), где все $\omega_i$ представляют действительные ограниченные сверху и снизу функции и где коэф. $m$ первых колонн таковы, что знаки $m$ первых членов каждой колонны одинаковы, а знаки $n-m$ остальных им противоположны, допускают во всех углах, где

$$0 < \int_{t_0}^{t} {}_i\alpha_j y_j\, dt \qquad (j=1, 2, \ldots m)$$

[1]) См. мою работу: «Задача о движении твердого тяжелого тела около неподвижной точки». Унив. изв., Москва, 1894, часть I, глава III, а также статью: «По поводу § 1 мемуара С. В. Ковалевской: «Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe». Моск. мат. сб., т. XVI, 1892 и вышецитированную работу (VI).

[2]) Не безынтересно, быть может, отметить, что при $\omega_i$ голоморфных или с полюсами 1-го порядка в рассматриваемой точке, необходимое условие существования полюсов порядка $> 1$ совпадает с необходимым условием существования решений (P), (V) или (A) в Д. У. (I), где $\bar{\bar{\omega}}_i = 0$, так как оба они приводятся к условию: $(i\alpha_j) = 0$.

для достаточно больших начальных значений $m$ первых $(y_i)$ и достаточно малых начальных значений остальных при $t \to \infty$ только прерывные решения или решения (B), причем в последнем случае $y_i$ первого класса $(i \leq m)$ стремятся к $\infty$, а остальные $y_i$ к 0.

Это прямо следует из формулы $(2'_3)$, примененной к данному типу Д. У.

Точно также можно для Д. У. (I) кососимметрического типа обеих категорий доказать некоторые предложения, являющиеся известным обобщением подобных же теорем, доказанных[1]) проф. Volterra для Д. У. (I) второй категории.

Эти теоремы в известной мере освещают здесь (тоже по отношению к решениям (B)) в некоторых случаях бесконечно-удаленные, в других достаточно близкие к началу области пространства $(y)$.

**Теорема XIV.** Если все доп. члены $\omega_i$[2]) в какой-либо системе Д. У. (I) кососимметрического типа допускают для $t \to \infty$ верхние (или нижние) (или те и другие) пределы, то абсолютное значение суммы $\sum y_i|\alpha_i = S$ во всех углах, где все $y_i|\alpha_i$ имеют один и тот же знак (нормальные углы), допускает всегда при $t \to +\infty$ верхнюю (или нижнюю), при $t \to -\infty$ нижнюю (или верхнюю) (или обе) границу, неравную 0 или $\infty$, пока $t \neq \infty$.

Действительно, в кососимметрическом случае всегда будем, очевидно, иметь:

$$\frac{dS}{dt} = \sum \omega_i y_i|\alpha_i .$$

Откуда, если (I) все $\omega_i \leq \omega_{\max}$, следует:

$$\frac{d \lg S}{dt} \leq \omega_{\max}$$

и, если (2) $\omega_i \geq \omega_{\min}$,

то

$$\frac{d \lg S}{dt} \geq \omega_{\min} .$$

Отсюда при $t \to +\infty$ имеем, при условии (1):

$$|S| \leq |S_0| e^{(t-t_0)\,\omega_{\max}}, \qquad (a)$$

а при условии (2)

$$|S| \geq |S_0| e^{(t-t_0)\,\omega_{\min}} . \qquad (b)$$

[1]) Проф. Volterra в своей работе (III) рассматривает собственно случай, когда $y_i|\alpha_i > 0$ и все $\omega_i$ или положительные или все отрицательные. См. стр. 42 и некоторые места его работы (II).

[2]) Здесь под $\omega_i$ подразумевается полное значение доп. члена, а он не представляется, как в формуле $(2^{IX})$, в виде произведения $\alpha_i \omega_i$.

Точно так же при $t \to -\infty$ и условии (1)

$$|S| \geq |S_0|\, e^{(t-t_0)\,\omega_{\max}} \qquad (\bar{c})$$

и при условии (2).

$$|S| \leq |S_0|\, e^{(t-t_0)\,\omega_{\min}} \qquad (\bar{d})$$

В случае соблюдения обоих условий (1) и (2) при $t \to +\infty$

$$e^{(t-t_0)\,\omega_{\min}} |S_0| \leq |S| \leq |S_0|\, e^{(t-t_0)\,\omega_{\max}} \qquad (\bar{e})$$

а при $t \to -\infty$

$$|S_0|\, e^{(t-t_0)\,\omega_{\min}} \geq |S| \geq |S_0|\, e^{(t-t_0)\,\omega_{\max}} \qquad (\bar{f})$$

Из приведенных формул видно, что в случае $(\bar{a})$ и $(\bar{d})$ невозможны решения, превосходящие по абс. значениям некоторые определенные конечные пределы, а в случаях $(\bar{b})$ и $(\bar{c})$ невозможны решения с абсолютными значениями для всех $y_i$, меньшими некоторых для каждого конечного $t$ определенных количеств.

В зависимости от знаков $\omega_{\max}$ и $\omega_{\min}$ возможно указать случаи, когда при $t \to \infty$ решения или стремятся прямо в $\infty$ или к 0, а также, конечно, в случае непрерывных $\int_{t_0}^{t} \omega_i\, dt$ констатировать в соответственных случаях отсутствие при $t \to \infty$ прерывных решений, а при $0 \geq \omega_{\max} > \omega_{\min}$ [1]) для $t \to +\infty$ или при $0 \leq \omega_{\min} \leq \omega_{\max}$ для $t \to -\infty$ наличность только ограниченных сверху.

За очевидностью дела я не останавливаюсь на этом подробнее, но подчеркиваю то обстоятельство, что в известных случаях наши выводы дают таким образом достаточные условия существования некоторых групп решений (В), и только их, иногда в бесконечно-удаленных, а иногда в достаточно близких к началу частях пространства $(y)$, или же там и тут, даже во всем нормальном углу.

§ 13. Дальше я постараюсь выяснить, насколько возможно, выше поставленный вопрос, какого типа непрерывные действительные решения могут существовать в непосредственной близости к началу координат и к другим точкам равновесия у Д. У. (I) более общего вида, чем сейчас рассмотренные, предполагая всегда правое или левое изменение $t$ от $t^0$ до $\infty$.

[1]) Подобные результаты для случая Д. У. (I) второй категории, у которых

$$\omega_{\max} = \omega_{\min} = 0,$$

были получены мною еще в 1925 г. и сообщены в мартовском заседании Моск. мат. общества за этот год.

При этом, однако, необходимо точно установить смысл самого употребляемого здесь термина «решения или интегральные кривые в непосредственной близости к данной точке равновесия». Мы говорим, что точка равновесия допускает в непосредственной своей близости решения того или другого типа, если всегда можно найти хоть одно такое решение этого рода, что его интегральная кривая для $t \to \infty$ (справа или слева) лежит совершенно [1]) внутри сферы (или гиперсферы) с точкой равновесия как центром, как бы малым ни был выбран ее радиус.

Все асимптотические к точке равновесия решения идут сюда, но сюда же подойдут решения не асимптотического типа, напр. решения (P), если вблизи рассматриваемой точки существует целое семейство таких решений, зависящее от одного или нескольких непрерывно или прерывно изменяющихся параметров, или даже просто некоторое бесконечное счетное множество их, имеющее точку равновесия предельной точкой. В случае асимптотизма расстояние точек каждой интегральной кривой от точки равновесия в пределе будет $= 0$, но при решениях не асимптотических расстояние точек каждой кривой будет иметь нижний предел $\neq 0$, только по мере приближения кривых к T. P. этот minimum будет делаться все меньше и меньше.

По отношению к началу координат, в качестве асимптотических и только в этом качестве, могут явиться только решения (B), но в качестве не асимптотических тут могут оказаться как решения (P), так и решения (V). То же справедливо и для пограничных точек равновесия, в то время, как для главных точек возможно говорить только о решениях (P) или (V), как непосредственно близких, причем последние могут быть и асимптотическими.

Теперь по отношению ближайших окрестностей начала координат в любом из прилегающих углов может быть доказана такая теорема:

**Теорема XV.** Необходимым условием возможности существования действительных решений, всегда удерживающихся в непосредственной близости к началу при $t \to \infty$, будет удовлетворение условий:

($\delta$) $\bar{\bar{\omega}}_i \leq 0$ при $t \to +\infty$ [2]) или ($\varepsilon$) $\bar{\bar{\omega}}_i \geq 0$ при $t \to -\infty$

[1]) Это определение, безусловно, исключает из рассмотрения все решения (A). Также, конечно, здесь не может быть и речи о прерывных решениях. Но в отдельные моменты времени при $t \to \infty$, как это указывал уже проф. Volterra, различая два способа подхода к $y_i = 0$: l'épuisement d'une façon régulière ou non régulière, интегральные кривые тех же решений (A) могут, конечно, произвольно близко проходить около соответ. точки равновесия.

[2]) $\bar{\bar{\omega}}_i$ здесь и всюду в этом параграфе означает асимптотические средние от $\omega_i$ или просто средние для периода в случае периодических $\omega_i$.

в числе $n$, если речь идет о главных, и в соответственно меньшем числе, если о приведенных решениях, и, если $\omega_i$ предполагаются такими, что начиная с некоторого конечного $t_0$ их средние значения $\overline{\omega}_i$, даже при неопределенности, не меняют знаков.

Это прямо следует из формулы (2'b) при достаточно малых значениях $y_i$. Из той же формулы вытекает:

**Теорема XV a.** Если все $\omega_i$ удовлетворяют написанным ниже неравенствам

$$(\delta_1) \qquad \max \omega_i < 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty$$

или

$$(\varepsilon_1) \qquad \min \omega_i > 0 \quad \text{при} \quad t \to -\infty,$$

то это является соответственно достаточным условием существования действительных непрерывных решений (B) и только их, всегда остающихся при правом (или левом) изменении $t$ в непосредственной близости к началу (асимптотических).

Так же очевидно следующее предложение.

**Теорема XV b.** Если одни $\omega_i$ удовлетворяют, при должном соблюдении правила о постоянстве знаков, первому, а другие второму из предыдущих неравенств, то в непосредственной близости к началу при $t \to \infty$ не удержится ни одно из главных решений, и все подобное возможно только для соответственно приведенных решений. Что касается изучения непрерывных решений в непосредственной близости к пограничным точкам равновесия, то тут надо предварительно составить Д. У. для отклонений движущейся точки (Д. Т.) от соответственной точки равновесия.

Полагая для главного решения:

$$y_j = \bar{y}_j + \eta_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots p)(p \leqslant n-1)$$

и

$$y_k = \eta_k \qquad (k = p+1, \ldots n)$$

при

$$\bar{y}_i \neq 0 \text{ и } \bar{y}_k = 0,$$

получаем

$$(9) \qquad \frac{d\eta_j}{dt} = (\eta_j + \bar{y}_j)({}_j a_1 \eta_1 + {}_j a_2 \eta_2 + \ldots + {}_j a_n \eta_n)$$

и

$$(9') \qquad \frac{d\eta_k}{dt} = \eta_k({}_k a_1 \eta_1 + {}_k a_2 \eta_2 + \ldots {}_k a_n \eta_n + \omega_k - \bar{\omega}_k),$$

де

$$\bar{\omega}_k + {}_k a_1 \bar{y}_1 + {}_k a_2 \bar{y}_2 + \ldots + {}_k a_n \bar{y}_n = 0$$

и только $\bar{y}_j \neq 0$.

*Замечание.* Подобные же системы получатся и для приведенных решений.

Из уравнений (9′), если им придать вид (2′b), вытекает:

**Теорема XVI.** Необходимым условием возможности для Д. У. (I) с такими $\omega_i$, что, начиная с некоторого $t_0$, знаки их асимптотических средних не меняются, хотя бы мы имели дело и с случаем неопределенности этих средних, существования в непосредственной близости к пограничной точке равновесия

$$\bar{y}_{p+1} = \bar{y}_{p+2} = \ldots = \bar{y}_n = 0$$

главных действительных непрерывных решений будет удовлетворение условия:

при $t \to +\infty$

$$\bar{\bar{\omega}}_k \leq \bar{\omega}_k,$$

а при $t \to -\infty$

$$\bar{\bar{\omega}}_k \geq \bar{\omega}_k.$$

*Замечание.* Соответственный вывод может быть сделан и для приведенных решений.

§ 13a. Если перейти к оставшемуся еще не рассмотренным случаю главных точек равновесия, когда, очевидно, придется иметь дело только с Д. У. (I) второй категории, то предыдущие уравнения для $\eta_i$ сведутся к системе из $n$ Д. У. вида (9) и на основании общей теории интеграции [1]) подобных уравнений мы будем иметь следующую теорему.

**Теорема XVII.** 1) Если все корни так называемого характеристического [2]) детерминанта $(\Delta_c)$ для Д. У. (9) будут обладать отличными от 0 действительными частями одного знака, то при положительности его при $t \to -\infty$, а при отрицательности при $t \to +\infty$, внутри рассматриваемого, прилегающего к главной точке равновесия пространства не будет никаких левых или соответственно правых решений, кроме непрерывных

[1]) См., напр., вышецитированную мою работу (VI) гл. I, но с заменой там $t$ через $e^t$.

[2]) Т. е. того $\Delta_c$, приравнивание которого 0 дает показатели $c_j$ решений $e^{c_j t}$ системы лин. Д. У.

$$\frac{d\eta_j}{dt} = \bar{y}_j ({}_j a_1 \eta_1 + {}_j a_2 \eta_2 + \ldots + {}_j a_n \eta_n) \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)(p \leq n).$$

асимптотического типа,[1]) где каждая Ф. $\eta_i$ будет разлагаться в ряд по некоторым показательным Ф. от $t$; 2) если часть упомянутых корней будет с действительными частями одного знака, а другая другого знака, то в рассматриваемой части пространства будут возможны и будут существовать частные асимптотические решения только двух соответственных подобных же форм; 3) в случае наличности еще корней 0 или чисто мнимых, наряду с упоминаемыми выше асимптотическими формами могут, быть может, существовать и иные асимптотические формы.

*Замечание.* Таким образом здесь мы имеем достаточные условия существования решений (В) (асимптотических) и в случае 1) только их.

Также в случаях 2) и 3) возможны, быть может, иные в непосредственной близости к Т. Р. лежащие интегральные кривые, кроме асимптотических.

В этом последнем направлении может, между прочим, дать некоторое освещение вопроса следующая теорема, представляющая в данном случае только несколько уточненную редакцию общей теоремы H. Poincaré.[2]

**Теорема XVII.** Если упомянутый в предыдущей теореме характеристический $\Delta_c$ не допускает чисто-мнимых и только $n - r$ корней 0,[3]) где $r$ означает ранг системы коэф. ${}_ia_k$, то в непосредственной близости к рассматриваемой главной точке равновесия не могут существовать никакие решения (Р).

Так как Д. У. (9) через постановку

$$y_i = \bar{y}_i(1 + \varepsilon\zeta_i),\quad \eta_i = \varepsilon\bar{y}_i\zeta_i$$

и, полагая, ${}_ia_k\bar{y}_k = {}_i\bar{a}_k$ приводится к виду:

$$\frac{d\zeta_i}{dt} = (1 + \varepsilon\zeta_i)({}_i\bar{a}_1\zeta_1 + {}_i\bar{a}_2\zeta_2 + \ldots + {}_i\bar{a}_n\zeta_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{9a}$$

[1]) Как это доказали Poincaré, Picard, Ляпунов, Bendixson, Horn, Lindelöf и др. и в особо общей форме H. Dulac в статье, помещенной в т. 10 за 1912 г., Bull. de la S. M. de France: «Solution d'un système d'équations différentielles dans le voisinage de valeurs singulières», статье, которая при составлении моей работы (VI), к сожалению, ускользнула от моего внимания, что заставило меня вновь доказать там с помощью метода Lindelöf'a общие результаты Dulac'a. Относительно единственности решения — см. мою работу (VI).

[2]) См. H. Poincaré. Les méthodes nouvelles de la M. C., t. I, p. 155. — E. Picard. Traité d'Analyse, t. III, 3-me éd., 1928, ch. VIII, § 18, p. 183. В изложении Poincaré и Picard не упоминается совсем о корнях, равных 0. В случае Д. У. (I) корни 0 могут, как это легко видеть, существовать только, если соответствующая точка равновесия будет смешанного характера. О минимальном числе таких корней будет сказано особо при доказательстве теоремы XVII.

[3]) Это есть, как мы увидим из рассуждений при доказательстве теоремы, минимально-возможное число корней 0 при ранге $r$ системы коэф. Оно соответствует наличности только простых, так наз. элементарных делителей характеристического $\Delta_c$, равно числу интегралов (2′) и дает возможность сведения дела к рассмотрению случая, когда корни 0 отсутствуют. Сравни: Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения, Харьков, 1892, стр. 167, 168.

то при существовании в непосредственной близости к точке равновесия $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots \bar{y}_n)$ решений (P) будет существовать всегда возможность величину параметра $\varepsilon$ выбрать так $\left(\text{напр. } \varepsilon = \sum|y_{i0} - \bar{y}_i|\right)$ малой, а начальные значения $\zeta_{0i}$ для каждого такого решения конечными и даже $\leq 1$ по абс. величине $\left(\text{но всегда } \zeta \neq -\frac{1}{\varepsilon}\right)$, что все $\zeta_i$ могут быть представлены как сходящиеся ряды:

$$\zeta_i = \zeta_{i(1)} + \varepsilon\zeta_{i(2)} + \ldots + \varepsilon^{m-1}\zeta_{i(m)} + \ldots$$

Но отсюда [1]) следует, что все $\zeta_{i(j)}$ суть также периодические (и здесь еще непрерывные, действительные) функции.

Следовательно для существования упомянутых выше решений (P) система лин. Д. У. с тем же самым характеристическим $\Delta_c$:

$$\frac{d\zeta_{i(1)}}{dt} = {}_i\bar{a}_1\zeta_{1(1)} + {}_i\bar{a}_2\zeta_{2(1)} + \ldots + {}_i\bar{a}_n\zeta_{n(1)} \tag{9b}$$

должна допускать по крайней мере одно периодическое решение, которое, если период решения уравнений (9a) не стремится к конечному определенному пределу при $\varepsilon \to 0$, и только при этом условии, может приводиться к постоянному количеству, т. е. соответствовать корню 0 характеристического детерминанта.

В данном случае мы можем, пользуясь существованием $n - r$ интегральных соотношений $(2'')$, здесь всегда приводимых к виду:

$$\frac{d\lg\left[(1+\varepsilon\zeta_{i_1})^{hA_{i_1}}\right]}{\varepsilon dt} + \frac{d\lg\left[(1+\varepsilon\zeta_{i_2})^{hA_{i_2}}\right]}{\varepsilon dt} + \ldots + \frac{d\lg\left[(1+\varepsilon\zeta_{i_r})^{hA_r}\right]}{\varepsilon dt} + \frac{d\lg\left[(1+\varepsilon\zeta_{i_{r+h}})^{hA_{r+h}}\right]}{\varepsilon dt} = 0, \qquad (h = 1, 2, \ldots n-r) \tag{9c}$$

заключить, что вместо системы (9b) можно привести вопрос к существованию периодических решений у некоторой системы лин. Д. У. вроде (9b), но только с характеристическим $\Delta_c$, не допускающим равным 0 корней.

Действительно, без труда можно установить, что для первоначальной формы $\Delta_c$ системы (9a) или (9b) степень кратности такого 0-вого корня не может быть $< n - r$, так как, как это известно из теоремы лин. Д. У.,[2])

Д. У. (9a) и (9b) с помощью линейных обратимых подстановок всегда могут быть разбиты на группы, соответственные корням характерист. $\Delta_c$

[1]) На тех же основаниях, как это установил Painlevé для однозначных решений (Bull. de la S. M. de France, t. 28. 1900) и как это можно также установить для периодических, ограниченных и т. п. интегралов.

[2]) Horn. Gewöhnliche D. G. beliebiger Ordnung. Leipzig, 1905, S. 75—89.

и каждая с числом Д. У., равным кратности корня, а группы на подгруппы (Гамбургеровы), где число Д. У. в каждой будет равно степени кратности так наз. элементарного делителя, соответствующего данной подгруппе.

Для корней 0 вторые части первого Д. У. каждой подгруппы будут начинаться с членов min. 2-го измерения относительно $\zeta_i$.

Но эти вторые части для всяких корней в своих членах 1-го измерения не будут отличаться от тех, которые получатся при применении тех же линейных преобразований к Д. У. (9a) в такой их форме:

$$\frac{d \lg (1 + \varepsilon \zeta_i)}{\varepsilon dt} = {}_i\bar{a}_1 \zeta_1 + {}_i\bar{a}_2 \zeta_2 + \ldots {}_i\bar{a}_n \zeta_n$$

Тогда, очевидно, что число Д. У., начинающихся с членов 2-х степеней, будет не менее, чем число интегральных соотношений (9c), т. е., не менее $n - r$.

А, следовательно, и кратность корня 0 тоже никогда не будет ниже этого числа.

В случае простых элементарных делителей (соответ. корням 0) число это будет как раз равно $n - r$ и, очевидно, обратно, если оно $= n - r$, то указанные элементарные делители простые.

Но в этом случае всегда возможно с помощью соотношений (9c) исключить $n - r$ переменных $\zeta_{h+i_r}$, а вместе с тем получить систему из $r$ Д. У. с теми же корнями $\Delta_c$, кроме 0, которые тоже исключаются, но тогда Д. У., аналогичные (9b), должны для возможности периодических решений допускать хоть один чисто мнимый корень у своего $\Delta_c$, который, следовательно, необходимо должен существовать и у первоначального $\Delta_c$, что и доказывает теорему.

*Замечание.* Вопрос о решениях (V), асимптотических к решениям (P), сейчас мною не ставится.

§ **14.** Таким образом, если не все, то многие из результатов предыдущего параграфа опираются на соответствующие факты из теории лин. Д. У., но в общем теории линейных и нелинейных Д. У. представляют две совершенно самостоятельных области, на которые распадается все ученье о Д. У.

Однако, при значительном развитии, которое получила теория лин., особенно алг., Д. У., является, быть может, желательным отмечать хотя бы ограниченные связи и аналогии между свойствами тех и других Д. У., которые иногда все-таки встречаются, хотя бы и по отношению к их отдельным частным группам, так как таким путем, быть может, намечаются

пункты, около которых одна область сможет, при дальнейшем изучении, несколько осветить другую или, по крайней мере, помочь в этом деле.

К числу таких аналогий и относятся те соотношения, которые я постараюсь установить дальше между решениями одной специальной системы Д. У. (I) первой категории и полученной из нее, путем преобразования системы 2-й категории, которая во многих случаях является в то же время, по отношению к первой, присоединенной системой предыдущих параграфов, соотношения, несколько напоминающие связь между решениями лин. Д. У.— со 2-й и без 2-й части.

Некоторые более слабые отзвуки этой же аналогии можно, пожалуй, видеть и в установленных в §§ 7, 8, 9 соотношениях между свойствами начальной и всякой присоединенной к ней системы, но эта общая аналогия сейчас не идет, так сказать, дальше поверхности.

Что касается упомянутых выше частных преобразований, то здесь мы можем доказать следующую теорему.[1])

**Теорема XVIII.** Если мы имеем систему Д. У. (I) первой категории такую, что все $\omega_i$ там равны между собою $\omega_i = \omega$, то всегда можно с помощью преобразования

$$(p) \qquad y_i\,dt = \overline{y}_i\,dt,$$

$$(q) \qquad \frac{1}{\beta} e^{\int_{t_0}^{t} \omega dt} \cdot dt = d\tau,$$

где $\beta$ означает произвольную постоянную, эту систему перевести эквивалентно в форму системы Д. У. (I) второй категории, но с теми же коэффициентами, с независимым переменным $\tau$ и Ф. $\overline{y}_i$.

Справедливость теоремы доказывается непосредственным вычислением.

**Теорема XVIII a.** Если в предыдущем предложении $\omega$ означает некоторую действительную периодическую Ф., для которой $\omega = 0$, и которая удовлетворяет условию ($\alpha$), то при вышеуказанном преобразовании каждое решение (P) начальной системы переходит в зависящую от произвольного параметра $\beta$ группу таких решений преобразованной системы и обратно, так что задача об изучении решений (P) для обеих систем эквивалентна, т. е., эквивалентна для начальной и ее приведенной системы, каковой здесь является преобразованная.

[1]) Эта теорема была доказана еще в моей работе (IV).

Так как соотношение $(q)$ можно представить в виде:

$$(q') \qquad c(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\left(e^{\int\omega dt}-c\right)dt=(\tau-\tau_0)\beta,$$

где $c$ означает среднее значение непрерывной периодич. Ф. $e^{\int_{t_0}^{t}\omega dt}$, и интеграл в первой части формулы $(q')$ в силу непрерывности Ф. $\int_{t_0}^{t}\omega dt$, может быть всегда представлен в виде ряда Фурье, то мы можем заключить, что переменные $t$ и $\tau$ одновременно возрастают и убывают, Ф. $e^{\int_{t_0}^{t}\omega dt}$ всегда отлична от 0, и все периодические Ф. от $t$ периода $T$ переходят здесь в периодические Ф. от $\tau$ периода $T\cdot\frac{c}{\beta}$, т. е., каждому решению (Р) основной системы действительно соответствует группа решений (Р) и обратно, что и требовалось доказать.

Из доказанного предложения вытекает:

Следствие I. Задачи о решениях (Р) двух систем Д. У.:

$$(1a) \qquad \frac{dy_i}{dt}=y_i({}_ia_1y_1+{}_ia_2y_2+\ldots+{}_ia_ny_n) \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

и

$$(1b) \qquad \frac{d\bar{y}_i}{dt}=\bar{y}_i({}_i\alpha_1\bar{y}_1+{}_i\alpha_2\bar{y}_2+\ldots+{}_i\alpha_n\bar{y}_n), \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

где

$${}_i\alpha_k-{}_ia_k=b_k$$

и среднее значение суммы

$$h=b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_ny_n$$

равно 0, эквивалентны.

Это следует из теоремы XVIIIa при предположении $\omega=h$.

Следствие II. Указанная в теореме XVIIIa начальная система Д. У. (I) всегда допускает систему решений (Р) вида

$$y_i=\bar{y}\beta e^{\int_{t_0}^{t}\omega dt},$$

где $\bar{y}_i$ означает координату точки равновесия преобразованной системы.

Конечно, при этом или основной $\Delta$ или хоть один его минор любого порядка должен отличаться от 0, чтобы не получить только тривиальное решение.

**Теорема XVIII b.** Если в теореме XVIIIa $\omega$ представляет даже не периодическую Ф., но такую, что удовлетворяется условие ($\alpha$) и $\int_{t_0}^{t} \omega dt$ есть всегда ограниченная (сверху и снизу) функция при $t \to +\infty$ (или $t \to -\infty$), то эта теорема будет вполне применима к решениям (V).

**Теорема XVIII c.** Если $\int_{t_0}^{t} \omega dt$ представляет только спорадически двухсторонне ограниченную Ф., то все решения (A) с такими же или меньшими интервалами ограничения будут также преобразовываться в решения (A).

Следствие. Таким образом для основной системы, где $\omega_i = \omega$, мы можем при надлежащих свойствах Ф. $\omega$ образовать решения любого типа: (P), (V) или (A) в форме [1])

$$y_i = \beta \bar{y}_i e^{\int_{t_0}^{t} \omega dt}.$$

Установленные в настоящем параграфе свойства решений показывают нам, что иногда по решениям Д. У. (I) второй категории, можно составлять очень полные представления о решениях Д. У. (I) первой.

Таким образом подробное изучение некоторых специальных групп Д. У. (I) второй категории, которым я займусь в следующей второй (и последней) главе этой работы, может иметь известное значение и для Д. У. (I) обеих категорий.

## ГЛАВА II

§ 1. Такими специальными группами явятся здесь главным образом те Д. У. (I), которые играют доминирующую роль в изысканиях проф. Volterra, а именно те, которые или соответствуют случаю определенно-отрицательной квадратичной формы $W$ (см. формулу $2^{IX}$) или, когда $W = 0$,

[1]) Если вместо $\bar{y}_i$ подставить сюда решения, указываемые теоремой XVII, с заменой в них $\tau$ через $t$ по формуле (q'), то получится еще новый ряд решений первоначальной системы. На основе этого ряда решений, так же как на основе решений теорем XVIII, могут быть, очевидно, составлены решения для более общего случая, когда $\omega_i = \omega + \varepsilon\varphi_i$, где $\varepsilon$ некоторый достаточно малый параметр.

так наз. случаю кососимметрической системы Д. У. (I). Но на ряду с ними я также коснусь таких Д. У. (I), не затрагивавшихся раньше, где соответствующая квадратичная форма определенно-положительна, а также случая симметрической системы ($H_i = 0$), причем мое изучение вообще будет иметь в виду все виды д. н. решений и все возможные значения и знаки начальных данных, а также некоторые, тоже раньше не изучавшиеся случаи так сказать вырождения определенной формы $W$, когда $\rho$, число составляющих ее квадратов, неравных 0, будет $n > \rho \geqslant 1$.

Сообразно с сказанным я и перейду теперь к изучению первого по порядку после точек равновесия класса действительных непрерывных решений, а именно решений (P), рассматривая[1]) однако в непосредственной связи с ними и те д. н. решения разных классов, которые обладают устойчивостью в смысле Пуассона,[2]) (в случае решений (A) хотя бы только внутри интервалов $\theta_k$ ограниченности) и о которых можно здесь доказать аналогичные теоремы. Я начну с рассмотрения симметрической системы Д. У. (I), хотя по отношению к ней и приходится ограничиться сейчас изучением только внутри таких углов (главного или соответ. приведенного пространства), где все произведения $\alpha_i y_i$ одного знака (нормальные углы).

**Теорема XIX.** Никакая система Д. У. (I) второй категории и симметрического типа не может допускать в соответственных нормальных углах решений (P). Действительно, если в формуле ($2^{IX}$) положить $H_i = 0$ и, помножив потом обе части каждого Д. У. соответственно на

$$\frac{\partial W}{\partial y_i} + \underline{\omega}_i,$$

сложить почленно все уравнения, то мы получим формулу:

$$(\Gamma) \qquad \frac{d}{dt}\left(W + \sum \underline{\omega}_i y_i\right) = \sum \alpha_i y_i \left(\frac{\partial W}{\partial y_i} + \underline{\omega}\right)^2,$$

откуда:

$$(\Gamma') \qquad \Big|_{t=t_0}^{t=t} W + \sum \underline{\omega}_i y_i = \int_{t_0}^{t} \sum \alpha_i y_i \left(\frac{\partial W}{\partial y_i} + \underline{\omega}_i\right)^2 dt.$$

[1]) Теоремы XIX и XIXa доказываются здесь впервые, так как ни в моей работе (V), ни у проф. Volterra, вообще не затрагивавшего вопроса о периодичности или устойчивости в смысле Пуассона, они не даются.

[2]) Хотя бы, если это возможно, только частичной, т. е., только на некоторой части интегральной кривой, даже в одной точке.

Так как первая часть формулы $(r')$ представляет в случае решения (P) периодическую, а вторая часть вообще постоянно возрастающую (или убывающую) функцию, то равенство $(r')$ возможно только, если всегда:

$$\alpha_i y_i \left(\frac{\partial W}{\partial y_i} + \underline{\omega}_i\right)^2 = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Но тогда мы постоянно имеем

$$\frac{dy_i}{dt} = 0,$$

что и доказывает теорему.

Так же можно доказать подобное же предположение и по отношению к решениям, устойчивым в смысле Пуассона.

**Теорема XIXa.** Система Д. У. (I), рассматривающаяся в теореме XIX, не может также допускать в нормальных углах и действительных право (или лево) непрерывных решений, устойчивых в смысле Пуассона всюду или частично, хотя бы только внутри соответствующих интервалов ограниченности или даже в одной точке.

Так как каждое такое решение при $t \to +\infty$ (или $-\infty$) всегда допускает моменты $t_p (p \to \infty)$, где все $y_i$, не равные тождественно 0, получают соответственно очень близкие к прежним значения, т. е., движущаяся точка по временам оказывается вблизи одной и той же точки пространства, то

$$\int_{t_p}^{t_{p+q}} \sum \alpha_i y_i \left(\frac{\partial W}{\partial y_i} + \underline{\omega}_i\right)^2 dt$$

при $p \to \infty$ (или $q \to \infty$) в силу произвольной малости для таких моментов первой части формулы $(r')$, должен тоже быть при этих условиях произвольно малым по абс. величине.

Но если

$$\alpha_i y_i \left(\frac{\partial W}{\partial y_i} + \underline{\omega}_i\right)^2 \neq 0,$$

то этого не может быть, так как этот интеграл окажется постоянно возрастающей (или убывающей) функцией. Отсюда вытекает справедливость теоремы.

§ 2. В гораздо более широкой области, а именно для всех углов пространства $(y)$ подобные предыдущим теоремы могут быть доказаны в некоторых случаях для не симметрических систем Д. У. (I), но только при предположении, что квадратичная форма $W$ распадается на сумму квадратов лишь одного знака, число которых minimum $= 1$.

Для удобства изложения я докажу сначала следующие 2 леммы.

Лемма II. Если система Д. У. (I) второй категории допускает хоть одну конечную главную или quasi-главную точку равновесия $\bar{y}_i$, то существуют следующие формулы:

$$(s) \qquad \frac{d}{dt}\left[\sum \frac{y_i}{\alpha_i} + \lg\left\{(y_1)^{-\frac{\bar{y}_1}{\alpha_1}}(y_2)^{-\frac{\bar{y}_2}{\alpha_2}}\dots(y_n)^{-\frac{\bar{y}_n}{\alpha_n}}\right\}\right] = 2\widehat{W}^{1})$$

и

$$(s') \qquad \Bigg|_{t=t_0}^{t=t}\left[\sum \frac{y_i}{\alpha_i} + \lg\left\{(y_1)^{-\frac{\bar{y}_1}{\alpha_1}}(y_2)^{-\frac{\bar{y}_2}{\alpha_2}}\dots(y_n)^{-\frac{\bar{y}_n}{\alpha_n}}\right\}\right] = 2\int_{t_0}^{t}\widehat{W}\,dt,$$

где $\widehat{W}^{2})$ означает квадратичную форму $W$, но только от аргументов $y_i - y_i$ и сама система Д. У. (I) может быть представлена в виде

$$(s'') \qquad \frac{dy_i}{dt} = \alpha_i y_i\left(\frac{\partial \widehat{W}}{\partial y_i} + \widehat{H}_i\right) = \alpha_i y_i \widehat{f}_i, \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

где $\widehat{H}_i$ и $\widehat{f}_i$ означают ф. $H_i$ и $f_i$ от подобных же аргументов. Чтобы доказать это, я делю обе части каждого Д. У. (I) на $\alpha_i y_i$ потом умножаю на $y_i - \bar{y}_i$ и складываю все почленно.

Тогда, замечая, что

$$\frac{y_i - \bar{y}_i}{\alpha_i y_i}\frac{dy_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{y_i}{\alpha_i} + \lg (y_i)^{-\frac{\bar{y}_i}{\alpha_i}}\right],$$

мы получаем соотношения $(s)$.

Лемма III. Если в какой-либо системе Д. У. (I) второй категории с коэф., которые представляют систему ранга $r$, соответствующая квадратичная форма $W$ распадается на сумму $\rho \geq 1$ только положительных (или только отрицательных) квадратов, то всегда имеет силу неравенство:[3]

$$(t) \qquad \rho \leqslant r \leqslant n.$$

[1]) Подобные формулы уже даны в работах проф. Volterra.

[2]) Так как $\widehat{W} = \Sigma (y_i - \bar{y}_i)(f_i + \omega_i)$, то все главные места равновесия принадлежат многообразию $\widehat{W} = 0$, ибо для них все $f_i + \omega_i = 0$. Это же заключение имеет силу и для приведенных Д. У. (I). Для краткости $f_i$ и $\omega_i$ здесь и дальше означены, как в гл. I.

[3]) Не трудно видеть, что лемма III имеет силу вообще для всяких квадратичных форм рассматриваемого типа, независимо от их вхождения в систему Д. У. (I). $\widehat{W}$ и $\widehat{H}_i$ не зависят тут от выбора Т. Р. $\bar{y}_i$, но от лин. форм $\widehat{f}_i = f_i + \omega_i$, как $W$ и $H_i$ от $f_i$.

Действительно, мы имеем тождественно:

$$(u) \qquad W = \frac{1}{2} \sum y_i \left( \frac{\partial W}{\partial y_i} + H_i \right) = \frac{1}{2} \sum y_i f_i .$$

Так как для таких значений $y_i$, для которых все $f_i = 0$, форма $W$ вместе со всеми составляющими ее квадратами также $= 0$, то число таких независимых друг от друга квадратов, которое здесь $= \rho$, должно быть очевидно равно или меньше, чем число независимых линейных форм $f_i$, которое здесь $= r < n$. Но это доказывает нашу лемму.

§ 3. На основе главным образом этих лемм можно доказать следующие предложения:

**Теорема XIXb.** Главные точки равновесия системы Д. У. (I) указанного в лемме III типа суть в то же время главные точки равновесия соответствующей кососимметрической системы, называя так систему Д. У. (I) вида

$$\frac{dy_i}{dt} = \alpha_i y_i \widehat{H}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

по отношению к системе

$$\frac{dy_i}{dt} = \alpha_i y_i \left( \frac{\partial \widehat{W}}{\partial y_i} + \widehat{H}_i \right).$$

Действительно, при существовании хоть одной конечной точки равновесия из примечания к лемме II следует, что при

$$f_i + \omega_i = 0 \quad \text{и} \quad \widehat{W} = 0,$$

а в данном случае также и все составляющие форму квадраты и, следовательно, все $\dfrac{\partial \widehat{W}}{\partial y_i}$ обращаются в 0. Но тогда теорема доказана.

Следствие. Таким образом необходимые условия существования решений (P), (V) и (A), как они даны в гл. I, удовлетворяются тут, очевидно, только в тех углах, где они удовлетворяются для соответствующей кососимметрической системы.

**Теорема XIXc.** Если система Д. У. (I) второй категории, указанного в лемме III типа и допускающая хоть одну конечную точку равновесия, имеет главные решения (P) или просто устойчивые в смысле Пуассона, хотя бы даже не всюду, а только в некоторых частях, д. н. решения, то эти решения всегда должны удовлетворять соотношению

$$(u') \qquad \widehat{W} = 0,$$

т. е. все такие решения могут тут существовать только, как решения соответствующей кососимметрической системы Д. У. Это следует из формулы (s′) при почти том же ходе рассуждений, как и в теореме XIX и XIXa.

*Замечание.* Подобное же имеет силу и для приведенных решений.

Следствие. Равенство (u′) здесь, очевидно, эквивалентно наличности $\rho$ линейных частных интегралов. Если такие интегралы невозможны, то и рассматриваемые решения то же. Так же справедлива такая теорема.

**Теорема XIXd.** Если форма $W$ в предыдущей теореме такова, что $\rho = r$ или $r - 1$, то не может существовать никаких решений рассматриваемых в теореме XIXb типов.[1])

Это следует из того, что, при $\rho = r$ и $W = 0$, все $f_i$ должны быть тоже 0, а, следовательно, при $\widehat{W} = 0$ все $\widehat{f}_i = 0$, так что тут все Д. У. (I) принимают вид

$$\frac{dy_i}{dt} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

что и доказывает первую часть теоремы.

Если же $\rho = r - 1$, то при $\widehat{W} = 0$ все независимые линейные формы $f_i$ приведутся к одной из них, так что рассматриваемые Д. У. (I) примут вид

$$\frac{dy_i}{dt} = \alpha_i y_i c_i (a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n + \underline{\omega}), \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

где $c_i a_i$ и $\underline{\omega}$ означают наряду с $\alpha_i$ некоторые постоянные. Но для такой системы Д. У. (I) имеет силу только что доказанная первая часть теоремы, так как здесь $\rho = r = 1$. Следовательно, теорема доказана.[2])

Еще, быть может, следует привести здесь следующее предложение, в более подробное и точное рассмотрение и формулировку которого я сейчас не имею времени войти, как и некоторых других подобных.

**Теорема XIXe.** Если в теореме XIXc $\rho \geqslant \frac{r}{2}$, то, исключая, быть может, некоторые особые случаи, тут невозможны никакие из упоминаемых там решений.

[1]) Эта теорема всегда имеет силу по отношению к случаю определенно положительных или отрицательных форм $W$, а также ко всем симметрическим системам Д. У. (I), так как в первом случае $\rho = r = n$, а во втором $\rho = r$.

[2]) В случае $\rho = 1$ все возможные решения (P) должны, очевидно, лежать в некоторой плоскости, к которой приводится тут все многообразие $\widehat{W} = 0$.

Это следует из того, что каждому из линейных интегралов, которые указываются в следствии из теоремы XIXc, соответствует еще интегральное соотношение вида:

$$y_1^{k\beta_1} y_2^{k\beta_2} \dots y_n^{k\beta_n} = \text{const}, \qquad (k = 1, 2, \dots \rho)$$

как это вытекает из самого строения системы Д. У. (I), так что здесь наряду с $n - r$ интегральными соотношениями (2″) будет существовать еще minimum $r$ вообще независимых новых интегральных соотношений, что делает возможным только решения вида

$$y_i = \text{const},$$

чем и доказывается теорема.

§ 4. Теперь я перейду к вопросу о решениях (V), (A) и (B) для рассмотренных в предыдущих параграфах систем Д. У. (I) и докажу следующую теорему.

**Теорема XX.** Система Д. У. (I) второй категории и симметрического типа может в каждом нормальном углу главного (или соответственно приведенного) пространства или совсем не допускать решений (V) или допускать только такие, которые асимптотически приближаются к месту равновесия (конечно, если таковое здесь лежит в конечной области, без чего решение (V) невозможно).

Это же имеет силу по отношению к ограниченным сверху (по модулю) решениям (A) или (B) при условии для первых (за возможностью для них асимптотизма только к главным местам равновесия смешанного типа) их возможного существования только при наличии таких главных мест равновесия, а для вторых при непременном существовании quasi-главных точек равновесия. Чтобы все это доказать, я должен буду применить здесь наряду с формулой $(r')$ еще ряд следующих рассуждений, в которых для определенности изложения всегда буду предполагать $\alpha_i y_i > 0$ и $t \to +\infty$, хотя все выведенное будет, очевидно, справедливо и в остальных случаях.

Именно, так как из формулы $(r')$ вытекает, что всякая интегральная кривая будет здесь стремиться в $\infty$, если сумма $\sum_{j=0}^{j=\infty} \bar{\theta}_j$ интервалов $\bar{\theta}_j$, в течение которых движущаяся точка (Д. Т.) будет находиться вне области, для которой все выражения $\alpha_i y_i \left(\frac{\partial W}{\partial y_i} + \omega_i\right)^2$ произвольно малы, иначе говоря вне непосредственной близости к лежащим тут местам равновесия, не будет конечной, то для существования упоминаемых в теореме решений необходимо, чтобы эта сумма была конечной (см. доказательство теоремы X).

Но тогда не трудно сообразить, что все $\bar{\theta}_j$ при достаточно большом $j$ должны быть предполагаемы произвольно малыми, и в силу формулы (3) или, точнее, на основании леммы I можно весьма близко к доказательству теоремы X утверждать, что если интегральная кривая помещается вся внутри некоторой конечной области:

$$\sum |y_i| \leqslant A,$$

то для каждого достаточно удаленного в $\infty$ интервала $\bar{\theta}_j$, если сумма начальных отклонений $\sum |y_i - \bar{y}_i|$ для него от некоторой ближайшей точки равновесия будет $= \varepsilon$, где $\varepsilon$ положительная величина, могущая здесь предполагаться произвольно-малой, max такой суммы для всего или части интервала будет $\leqslant \sigma + \varepsilon$, где $\sigma$ представляет другую положительную величину, зависящую от $A$ и величины интервала (вернее от наиб. значения $\bar{\theta}$ возможного для интервалов $\bar{\theta}_j$, когда $j$ достаточно велико) (см. формулу $(3'')$ и которую здесь тоже можно предполагать любой степени малости, причем мы отсчитываем отклонения от одной и той же точки равновесия за весь интервал.

Но это и доказывает обязательность асимптотизма, если не к одной определенной точке, которая может меняться от интервала к интервалу, то ко всему месту равновесия вообще, если соответствующие решения существуют. Таким образом теорема доказана.

*Замечание.* Не бесполезно, быть может, отметить, что решения (A) и (B), если последнее тоже асимптотично к местам равновесия, будут необходимо ограничены по модулю сверху, если в соответственных углах находятся только конечные точки равновесия. Что касается неограниченных решений (B), то в условиях предыдущей теоремы они возможны всегда, как это очевидно.

**Теорема XXa.** Предыдущая теорема будет справедлива и для неограниченных сверху решений (A), но только с той оговоркой, что здесь возможны отклонения от асимптотизма, но такие, что область их проявления с течением времени все далее и далее удаляется от начала, тогда как в ближайших к нему областях асимптотизм соблюдается все более и более. Также здесь должно отметить, что такие неограниченные решения (A) возможны только в углах, где наряду с конечными есть и бесконечно удаленные части мест равновесия. Это следует из того, что на основании формулы $(3'')$ можно заключить, что с повышением величины $A$, но с удалением в то же время соответствующих промежутков $\bar{\theta}_j$, существующих и здесь в силу

ограниченности решений (A) в центральной области и монотонности интеграла в формуле $(r')$, в $\infty$ путем повышения значения индекса, отклонения движущейся точки (Д. Т.) от положения равновесия не будут превосходить пределов, подобных устанавливаемым в предыдущей теореме, только разница будет в том, что для каждой области $\sum |y_i| \leq A$ с увеличением $A$ будет отдаляться и срок такого ограничения отклонений, вплоть до

$$t = \infty, \quad A = \infty.$$

При только конечных местах равновесия такие неограниченные решения (A) возможны тут, очевидно, не будут.

§ 5. Переходя теперь к изучению трех последних классов решений у несимметрических групп Д. У. (I), исследовавшихся нами в § 3 по отношению к периодическим и им близким решениям, я остановлюсь сначала на вопросе о решениях в нормальных углах, подобно тому, как это делает и Volterra в своем более ограниченном круге Д. У. (I), причем всегда будет мною делаться здесь, как и в следующем параграфе, предположение, что изучаемые Д. У. (I) допускают конечные главные точки равновесия, если иное особо не указано. Сообразно с тем, что, будут ли эти точки лежать тоже в нормальных углах или в других (анормальных), я разобью свое исследование на части, предпослав однако ему одну теорему общего характера.

**Теорема XXI.** Все системы Д. У. (I) рассматриваемого в § 3 типа (главные или соответственно приведенные) или не допускают решений (V) и (A), или допускают только такие, что их интегральные кривые приближаются асимптотически[1]) (при $t \to \infty$) к геометрическому (в пространстве $(y)$) многообразию: $\widehat{W} = 0$, причем для решений (A), неограниченных сверху, возможны некоторые отступления от асимптотизма, область которых с течением времени все дальше удаляется в $\infty$ в то время, как степень асимптотического приближения в конечных частях пространства все возрастает.[2]

Что касается решений (B), то они возможны и без всякого подобного асимптотизма и притом, говоря вообще, во всех углах, а не только там, где лежат элементы многообразия $\widehat{W} = 0$, как остальные классы решений.

[1]) В частности рассматриваемые решения могут в отдельных случаях и прямо лежать на многообразии $\widehat{W} = 0$, подобно решениям (P).

[2]) В том случае, когда многообразие $\widehat{W} = 0$ имеет в соответственных углах только конечные части, все решения (A) будут очевидно, ограничиваться сверху При исключительно пограничном его характере решения (A) невозможны, так же, как и решения (V).

В случае $\rho = r$ указанный выше асимптотизм совпадает для всех решений (V) и (A) с таковым к местам равновесия, а, если $\rho = r-1$, то подобное совпадение имеет место по отношению к решению (V) и ограниченным сверху решениям (A).[1]) В этих случаях при quasi-главных местах равновесия (V) и (A) невозможны. Так как в виду ограниченности (сверху и снизу) решений (V) всегда, а решений (A) во время $t$-интервалов ограниченности из формулы $(s')$ следует, что $\int_{t_0}^{t} \widehat{W} dt$ должен для этих решений представлять двухсторонне ограниченную Ф., то на основании монотонности этого интеграла так же, как в §§ 3 и 4, можно заключить, что он ограничен, и что сумма $\sum \bar{\theta}_j$ промежутков времени $\bar{\theta}_j$, вне которых форма $\widehat{W}$ имеет произвольно малые значения, стремится к некоторому конечному пределу при $t \to \infty$, и, опираясь на этот факт, с помощью рассуждений, применявшихся в доказательстве предшествовавшей теоремы об асимптотизме к местам равновесия, доказать подобное же по отношению к многообразию $\widehat{W} = 0$.

Справедливость утверждений настоящей теоремы о решениях (B) и о случае $\rho = r$ делается при этом очевидной сама собою, так что остается рассмотреть еще только случай

$$\rho = r - 1.$$

Тут не трудно усмотреть, что указанные для этого случая решения, как ограниченные сверху, будут иметь полный асимптотизм к многообразию $\widehat{W} = 0$, а, следовательно, здесь Д. У. (I) могут быть для всякого момента времени (при $t \to \infty$) представлены в виде:

$$\frac{dy_i}{dt} = \alpha_i y_i c_i (a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n + \underline{\omega} + \varepsilon_i),$$

где $c_i$, $a_i$, $\underline{\omega}$ означают соответственно постоянные, а $\varepsilon_i$ некоторые непрерывные $\varphi$ от $t$, которые всегда можно предполагать произвольно-малыми, при достаточно больших значениях $t$.

Но эти уравнения дают соотношение:

$$\frac{d}{dt} \sum \frac{y_i a_i}{\alpha_i c_i} = (a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + \underline{\omega})^2 + \sum \varepsilon_i \alpha_i y_i,$$

[1]) Для случая решений (V) и $\rho = r = n$ проф. Volterra доказал подобную же теорему в связи с доказанной им при этих же условиях теоремой, подобной следующей сейчас теореме XXII. См. стр. 101—103 его работы III.

из которого легко видеть, что сумма интервалов времени, вне которых выражение $a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n + \underline{\omega}$ не произвольно мало, стремится к конечному пределу, если $t \to \infty$, аналогично подобным же суммам в предшествующих рассмотрениях.

Но тогда, в виду необходимо существующей в силу этой конечности произвольной малости таких интервалов при их достаточном удалении от начала отсчета времени и вытекающих отсюда на основе леммы I обычных следствий о возможности в течение их только малых изменений, мы можем заключить о существовании нужного асимптотизма, который, однако, при quasi-главных местах равновесия противоречил бы основным свойствам решений (V) и (A), что в своей совокупности устанавливает полную справедливость теоремы.

§ 6. Ближайшее изучение решений внутри и на границах именно нормальных углов дает нам следующие предложения сначала для случаев нахождения точек равновесия тоже в нормальных углах.

**Теорема XXII.** В каждом нормальном углу, в котором лежат конечные точки или места равновесия, каждая система рассматриваемого в §§ 3 и 5 типа не допускает при условиях

$$\frac{y_i}{\alpha_i} > 0, \quad \int_{t_0}^{t} \widehat{W} dt < 0 \left( \text{или } \frac{y_i}{\alpha_i} < 0, \quad \int_{t_0}^{t} \widehat{W} dt > 0 \right),$$

для $t \to \infty$ никаких других действительных главных решений, как непрерывные решения (V), включая сюда при $\rho$, отличном от $r$ и $r-1$, также возможность решений (P), если они не исключаются в силу § 3. В случае, если лежащие тут места равновесия суть исключительно пограничные (quasi-главные: $\bar{y}_k = \bar{y}_\lambda = \ldots = \bar{y}_\mu = 0$), то наряду с решениями (V) возможны также главные ограниченные сверху решения (A) и (B), (но последние два при непременном условии неограниченности снизу и только по отношению ко всем или некоторым из $y_k, y_\lambda, \ldots y_\mu$).[1])

Это следует из соотношения (s'), где первая часть формулы при достаточно малых (или при тех и других одновременно) значениях всех или некоторых $y_i$ будет $> 0$, а вторая $< 0$ (или соответственно $< 0$ и $> 0$), так как выражение

$$\frac{y_i}{\alpha_i} + \lg (y_i | y_{0i})^{-\frac{\bar{y}_i}{\alpha_i}}$$

[1]) Решения (V) и (A) в случаях их существования обладают, конечно, асимптотическими свойствами, установленными в теореме XXI. Это примечание имеет силу и по отношению к остальным теоремам настоящего параграфа.

всегда сохраняет при этом знак $\frac{y_i}{\alpha_i}$, что делает такие значения $y_i$ здесь невозможными, кроме исключительного случая, когда некоторые $\bar{y}_i = 0$, и что вместе с тем устанавливает, что решения суть решения (V) или, при quasi-главных местах равновесия, классов (A) или (B), в последних случаях, с указанными свойствами ограниченности.

*Замечание I.* Если кроме того $\rho = r$ или $\rho = r - 1$, то главные решения (V) и (A) при наличности только quasi-главных точек равновесия тоже делаются невозможными, так как для них не может быть требуемого тогда теоремой XXI асимптотизма к точкам равновесия. Тогда возможны только решения (B) указанного в теореме типа.

Таким образом, здесь для решений (B), а в теореме XXII для решений (V) указываются достаточные условия существования и при том в целых углах пространства $(y)$.

**Теорема XXIIa.** Если в предыдущей теореме предположить, что мы имеем при $t \to \infty$ всегда неравенства одного знака

$$\frac{y_i}{\alpha_i} > 0, \quad \int_{t_0}^{t} \widehat{W} dt > 0 \left( \text{или } \frac{y_i}{\alpha_i} < 0, \quad \int_{t_0}^{t} \widehat{W} dt < 0 \right),$$

то для рассматриваемых там Д. У. (I) и углов не может[1]) существовать непрерывных действительных решений, асимптотических к местам (главным или quasi-главным) равновесия или даже просто способных бесконечно часто к ним приближаться с любой степенью подхода.

Действительно, так как выражение:

$$\frac{y_i}{\alpha_i} - \frac{y_{0i}}{\alpha_i} - \lg (y_i | y_{0i})^{\frac{\bar{y}_i}{\alpha_i}}$$

может быть всегда представлено в виде:

$$\frac{\bar{y}_i}{\alpha_i} \left[ \left\{ \frac{y_i}{\bar{y}_i} - \lg (y_i | \bar{y}_i) \right\} - \left\{ \frac{y_{0i}}{\bar{y}_i} - \lg (y_{0i} | \bar{y}_i) \right\} \right],$$

если $\bar{y}_i \neq 0$, и в виде

$$\frac{y_i}{\alpha_i} - \frac{y_{0i}}{\alpha_i}$$

если $\bar{y}_i = 0$, и так как по доказанному проф. Volterra[2]) Ф. $\frac{e^x}{x}$ при $x > 0$

[1]) Подобная же теорема, но для случая $W = \rho = 0$ доказана проф. Volterra на стр. 47—49 его труда III.

[2]) См. стр. 46 работы III проф. Volterra.

всегда $> e$, т. е., $x - \lg x > 1$, то при $y_i$, достаточно близких к $\bar{y}_i$, мы будем иметь, что первая часть формулы (s') сделается по знаку обратна второй, каковое reductio ad absurdum и доказывает теорему. Можно сказать, что здесь мы имеем случай устойчивого равновесия (конечно, при соответственном направлении изменения $t$).

Следствие. Таким образом в силу теоремы XXI при установленных в предыдущей теореме условиях, решения (V) и (A), кроме решений (B) и прерывных,[1]) могут существовать, только если геометрическое многообразие $\widehat{W} = 0$ не совпадает вполне с местами равновесия. Так что при $\rho = r$ всякое решение (V) и (A), а при $\rho = r - 1$ решения (V) и ограниченные сверху решения (A) здесь невозможны, как невозможны и при всяких значениях $\rho \geqslant 1$, если многообразие $\widehat{W} = 0$ имеет исключительно пограничный характер. Если точки равновесия лежат не в том же нормальном углу, как изучаемые решения, то мы имеем следующую теорему.

**Теорема XXIIb.** В случае нахождения главных точек равновесия не в том же, а в противоположном расположению решения нормальном углу мы можем иметь здесь из действительных непрерывных только решения (B), которые могут быть асимптотическими к многообразию $\widehat{W} = 0$, но могут и не быть такими. Что касается необходимой неограниченности решений (B), то эти решения будут непременно неограничены сверху, если $\frac{y_i}{\alpha_i} > 0$,

$$\int_{t_0}^{t} \widehat{W} dt > 0 \left( \text{или } \frac{y_i}{\alpha_i} < 0, \quad \int_{t_0}^{t} \widehat{W} dt < 0 \right)$$

или непременно снизу, если

$$\frac{y_i}{\alpha_i} < 0, \quad \frac{\bar{y}_i}{\alpha_i} \geqslant 0, \quad \int_{t_0}^{t} \widehat{W} dt > 0 \left( \text{или } \frac{y_i}{\alpha_i} > 0, \quad \int_{t_0}^{t} \widehat{W} dt < 0 \right),$$

причем возможна, конечно, и обоюдосторонняя неограниченность.

Это прямо следует из выводов главы I о необходимых условиях существования решений (V) и (A) и из основных свойств формулы (s').

При нахождении точек равновесия в анормальных углах можно доказать также следующее предложение.

**Теорема XXIIc.** При аналогичных предыдущей теореме условиях, но при расположении точек равновесия не в нормальных, а в анормальных углах из д. н. решений возможны только решения (B), которые тоже иногда

[1]) Если говорить, как обычно, только о действительных решениях.

могут быть асимптотическими к многообразию $\widehat{W} = C$, а в отношении своей всегдашней неограниченности должны быть

$$\left( \text{при} \int_{t_0}^{t} \widehat{W} dt \quad \text{и} \quad \frac{y_i}{\alpha_i} \text{ одного знака} \right)$$

неограничены или снизу, по отношению, всех или части тех $y_i$, для которых $\frac{\bar{y}_i}{\alpha_i}$ имеет знак, подобный знаку $\frac{y_i}{\alpha_i}$ или $\bar{y}_i = 0$, или сверху и тогда по отношению к любому $y_i$. При $\int_{t_0}^{t} \widehat{W} dt$ и $\frac{y_i}{\alpha_i}$ разных знаков должна всегда существовать неограниченность снизу по отношению хоть одного $y_i$, для которого $\frac{\bar{y}_i}{\alpha_i}$ того же знака, как $\int_{t_0}^{t} \widehat{W} dt$ или $\bar{y}_i = 0$.

Это вытекает из тех же оснований, как и предшествующая теорема.

*Замечание.* Все предшествующие теоремы справедливы как для главных, так и для соответственно приведенных уравнений. Так же они сохраняют силу наряду с решениями (V) и для решений (P) там, где теоремы § 3 их не исключают.

§ 7. Чтобы покончить с исследованием вопроса, поднятого в § 5, мне остается еще рассмотреть случай, когда сами интегральные кривые располагаются в анормальных углах, случай, который проф. Volterra не затрогивает.

Здесь мы имеем следующие три теоремы.

**Теорема XXIId.** Д. У. (I) рассматриваемых в §§ 3, 5, 6 типов могут допускать в анормальном углу, в котором находятся главные места равновесия, непрерывные решения классов (V) (включая решения (P), если выводы § 3 их не исключают), (A) и (B), причем решения (A) должны быть, если они действительно существуют, непременно вдвойне и притом, так сказать, одновременно неограничены; если $\int_{t_0}^{t} \widehat{W} dt > 0$, то сверху по отношению хоть к одному из тех $y_i$, для которых $\frac{y_i}{\alpha_i} > 0$, и одновременно снизу по отношению одного из тех $y_i$, для которых $\frac{\bar{y}_i}{\alpha_i} < 0$, или только снизу, но непременно по отношению обеих групп.

$$\left( \text{При} \int_{t_0}^{t} \widehat{W} dt < 0 \text{ меняются знаки и остальных неравенств} \right).$$

При только quasi-главных точках равновесия ($\bar{y}_i = 0$) возможна также и только односторонняя неограниченность по отношению к соответств. $y_i$.

Что касается решений (B), то, при $\int_{t_0}^{t} \widehat{W}dt > 0$, неограниченное сверху решение непременно неограничено относительно хоть одного $y_i$, для которого $\frac{y_i}{\alpha_i} > 0$, а при неограниченности снизу хоть одного $y_i$, для которого

$$\frac{\bar{y}_i}{\alpha_i} > 0$$

или (при quasi-гл. точках равновесия) $\bar{y}_i = 0$.

$\left( \text{При } \int_{t_0}^{t} \widehat{W}dt < 0 \text{ тоже нужно менять знаки всех неравенств} \right)$.

**Теорема XXIIe.** Если точки равновесия лежат в другом чем решение, анормальном углу, то из непрерывных решений здесь вообще возможны только решения (B), при $\int_{t_0}^{t} \widehat{W}dt > 0$ и неограниченности сверху — обязательно неограниченные по отношению хоть одного $y_i$, для которого $\frac{y_i}{\alpha_i} > 0$, а при неограниченности снизу — неограниченные по отношению хоть одного $y_i$, для которого $\frac{\bar{y}_i}{\alpha_i} \geqslant 0$. При $\int_{t_0}^{t} \widehat{W}dt < 0$ знаки неравенств меняются, как выше.

**Теорема XXIIf.** В случае, если точки равновесия лежат в нормальном углу, то предыдущая теорема вообще сохраняет силу с той только разницей, что возможность неограниченных снизу решений существует, если все $\bar{y}_i \neq 0$, только при условии одинаковости знаков $\int_{t_0}^{t} \widehat{W}dt$ и $\frac{\bar{y}_i}{\alpha_i}$. Если некоторые $\bar{y}_i = 0$, то такая неограниченность по отношению к соответств. $y_i$ может существовать и при любом знаке $\int_{t_0}^{t} \widehat{W}dt$.

Все эти теоремы, которые могут быть относимы к приведенным системам Д. У. (I), вытекают из рассмотрения соответствующих формул (s'), где при решениях (A) $\int_{t_0}^{t} \widehat{W}dt$ всегда ограничен по модулю сверху, и из основных свойств решений (A) и (B).

*Замечание.* Должно заметить, что $\bar{y}_i$ в формуле (s′) означает любую возможную систему значений координат какой-либо из существующих главных или quasi-главных точек равновесия.

При исследовании следует брать ту, которая дает наибольшие результаты, например, точка в нормальном углу и т. п. Особенно упрощается формула (s′) при применении quasi-главной тривиальной точки равновесия, что возможно только при условии: все $\omega_i = 0$.

§ 8. Для полноты изложения я скажу еще несколько слов: 1) о предельном случае, когда $\rho = 0$, т. е., когда Д. У. (I) суть кососимметрического типа ($W = 0$) и 2) о случае Д. У. (I) второй категории второго вида, т. е., когда все $\omega_i = 0$, как об одном из наиболее простых.

При $W = \widetilde{W} = 0$ сохраняют силу все выводы, которые можно сделать на основании формул $(\bar{e})$ и $(\bar{f})$ § 12 главы I и которые уже имелись в виду проф. Volterra, так же как и выводы теорем §§ 6 и 7, только с тем отличием, что результаты, различающиеся там условиями о знаках, совмещаются здесь попарно в единственный общий вывод, сохраняющий силу и для правого и для левого изменения.

В виду простоты дела я не буду входить в большие подробности.

При $\omega_i = 0$ имеет для всех типов Д. У. (I) этого второго вида применение теорема XII первой главы об отсутствии при $({}_i a_j) \neq 0$ и при всех минорах всех порядков $\neq 0$ во всех пространствах (главном и приведенных), а при всех минорах первого порядка $\neq 0$ в главном пространстве всяких других классов действительных непрерывных решений, кроме (B), а при $({}_i a_j) = 0$, но минорах первого порядка $\neq 0$ легко выводится на основе результатов I-й главы предложение о том, что тут тогда может существовать и прямая равновесия типа (b′) и притом только в некоторых двух противолежащих углах главного пространства, где, следовательно, только и возможны иные, кроме (B), д. н. главные решения.

Подсчитывая миноры, равные 0, можно было бы в этом случае легко сообразить положение точек равновесия, а, следовательно, и углы, где возможны решения (P), (V) и (A), и для всех приведенных пространств.

Наиболее простым классом из Д. У. (I) второго вида (т. е., при $\omega_i = 0$) будет несомненно, как и в других случаях, класс кососимметрических систем Д. У. (I). Тут, на основании свойства кососимметрических $\Delta$ при нечетном порядке быть равным 0, а при четном порядке приобретать форму квадрата многочлена, составленного из коэф. Д. У., очевидно вытекает, если оставить в стороне частные предположения о возможности обращения этих квадратов иногда тоже в 0, что все кососимметрические системы Д. У. (I)

четного порядка нигде в главном пространстве не могут допускать точек равновесия, кроме тривиальной, которые однако в виде прямой будут в некоторых двух противоположных углах 1-го приведенного пространства, чтобы опять явиться в подобной же форме в 3-м приведенном пространстве и т. д. Подобное же будет и с решениями (P), (V) и (A). То же будет иметь место для $n$ нечетного, только начать придется с присутствия точек равновесия в виде прямой в главном, затем установить их отсутствие в 1-м приведенном и т. д. в прежней последовательности.

Что упоминаемые тут прямые находятся при $\alpha_i$ любого значения в независящих от $\alpha_i$ углах, легко сообразить по знакам адъюнкт каждого нечетного кососимметрического $\Delta$, адъюнкт, которым соответственные значения $\bar{y}_i$ пропорциональны.

Таким образом в надлежащих углах тут возможны кроме прерывных только решения (B), и это — вне зависимости от $\alpha_i$.[1]

При этом из формулы (s'), которая в нашем случае

$$\left(W = \widehat{W} = \omega_i = 0\right)$$

приобретает вид

$$\sum \frac{y_i}{\alpha_i} = \text{const},$$

вытекает, что во всяком нормальном углу, при всякой системе значений $\alpha_i$, все решения ограничены сверху по модулю, а, следовательно, во всяком случае непрерывны. Это было указано мною еще в 1925 г. Это же дается проф. Volterra на стр. 43 его работы III.

Если взять не кососимметричную систему, а Д. У. (I) вида

$$\frac{dy_i}{dt} = \alpha_i y_i \left(\frac{\partial W}{\partial y_i} + H_i\right),$$

то при знакопостоянной форме $W = \widehat{W}$ на основании теоремы XIX следует, что всякие решения (P) могут существовать только в тех углах, где они возможны по предыдущему для кососимметричной системы:

$$\frac{dy_i}{dt} = \alpha_i y_i H_i.$$

Что касается случаев, когда конечные точки равновесия совсем отсутствуют, то для д. н. решений здесь будут возможны на основании резуль-

[1] Наше рассуждение здесь показывает собственно, что в надлежащих углах решения (P), (V), (A) невозможны. Оно применимо и вообще при $\omega_i = 0$.

татов гл. I только решения (B), о дальнейших свойствах которых иногда можно судить, исходя из теорем XV, XVa и XVb, а также на основании соотношений (2″). Также, быть может, не бесполезно отметить, что выводы общих теорем XXII, XXIIa, а также теорем XIX и XIXa подтверждаются для окрестностей главных точек равновесия теми теоремами о корнях характеристического $\Delta_c$, где доказывается,[1]) что в случае симметрической системы Д. У. (I) эти корни для нормального угла должны быть всегда действительными, в случае кососимметрической системы всегда чисто мнимыми, а при знакопостоянных формах $W$ должны иметь действительные части, совпадающие по знаку с формой.

Все эти выводы являются результатом более детального изучения характеристического уравнения общей теории.

Но я в виду и без того разросшегося размера настоящей статьи не стану здесь входить в дальнейшие детали и кончаю на этом свою работу в надежде, что, несмотря на недостаточность и отрывочность результатов, она все-таки вносит местами некоторое дополнительное освещение в рассматриваемые вопросы.

## G. G. APPELROT. ÜBER EINIGE EIGENSCHAFTEN REELLER KONTINUIERLICHER LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER VEREINFACHTEN FUNDAMENTALFORM

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Arbeit ist der Frage über Eigenschaften der reellen kontinuirlichen Integrale der D. G. der Form

$$(I) \qquad \frac{dy_i}{dt} = y_i ({}_ia_1 y_1 + {}_ia_2 y_2 + \ldots + {}_ia_n y_n + \omega_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

gewidmet, wo ${}_ia_y$ konstante Koeffizienten und $\omega_i$ (Zusatzglieder) überhaupt analyt. oder nicht analyt. Funktionen von $t$ darstellen (die vereinfachte Fundamentalform).

D. G. dieser Form spielen, wie ich es schon in meinen vorigen Aufsätzen hingewiesen habe, unter den übrigen alg. und s.-alg. D. G. eine besondere Rolle, weil man vermittelst einiger zwar nicht umkehrbarer Transformationen, d. h., mit Erhöhung der Ordnung, jedes System dergleichen D. G. in die Form (I) bringen kann.[2]) Aber in der vorliegenden Arbeit betrachte ich diese Form nur als

[1]) P. Quintili. Sopra un'equazione analoga all'equazioni secolare. Batt. G. 47. [(2), 16], 21—24. Цитируется по Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Jahrgang 1909, Bd. 40, Heft. I. Также см. у проф. Volterra на стр. 53 его работы III для кососим. случая и на стр. 85 там же для случая отрицательно-определенной формы.

[2]) Über einige Transformationen der Fundamentalform eines Systems alg. D. G. Mosk. Math. Sam., Bd. 32, 1924, Moskau

eine selbständige Klasse der D. G., welche nicht ohne Interesse und Bedeutung ist, wie die nicht seit lange (1926—31) veröffentlichten Untersuchungen[1]) von Prof. Volterra über die math. Theorie des Kampfs um die Nahrung beweisen, wo der berühmte italienische Mathematiker D. G. ganz derselben Form öfters benutzt.

Von diesem Standpunkte aus suche ich die Resultate zu erweitern und zu ergänzen, welche ich selbst in meiner Arbeit[2] «Zur Frage der periodischen Lösungen alg. D. G.», Mosk. Math. Sam., Bd. 34, 1927-28, Moskau», in Bezug auf die D. G. (I), aber nur mit konstanten $\omega_i$ (D. G. (I) der 2. Kategorie), und ihre periodischen kontinuierlichen Lösungen und Prof. Volterra (auch nur für die D. G. der zweiten Kategorie) in seinen oben zitierten[3]) Untersuchungen angelangt haben.

Gegenwärtig ist mir gelungen (siehe Kap. I) schon für die D. G. (I) der 1-ten Kategorie (mit veränderlichen $\omega_i$) einige allgemeine notwendige Existenzbedingungen für die verschiedenartigen reellen kontinuierlichen Lösungen zusammenzustellen, wobei ich eine neue Klasse (A) dergleichen Lösungen in Betracht ziehe und alle Ergebnisse in eine möglichst anschauliche Form bringe.

Nebst diesen notwendigen Existenzbedingungen erhalte ich im II-ten Kapitel für spezielle Gruppen der D. G. (I) der 2-ten Kategorie, unter welchen die von Prof. Volterra untersuchten und einige neue die wichtigsten sind, in gewissen Fällen noch hinreichende Existenz- (oder Nichtexistenz-) Bedingungen, was die Eigenschaften der Lösungen der betrachteten D. G. (I) mehr zu erleuchten lässt.

Die complexen analytischen Lösungen und die Frage über singuläre Punkte der F. $y_i$ lasse ich hier beiseite, nur 2 Bemerkungen über die Bestimmung einiger Koef. (der Residuen) in den entsprechenden Loranreihen und über die Bestimmung der Mittelwerte der nicht reellwertigen periodischen Lösungen ausgenommen.

---

(*На обороте см. авторские поправки*)

[1]) Zum Beispiel: Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie par V. Volterra, rédigées par M. Brelot. Paris, 1931.

[2]) Meine früheren Resultate, welche die periodischen Lösungen betreffen, wurden zu einem Teil (Satz VII) schon im März 1925 (für den Fall $\omega_i = \text{konst.}$) auf der Sitzung der Mosk. Math. Gesellschaft, später im ganzen (aber immer für die D. G. (I) der 2. Kategorie) der Versammlung der russischen Mathematiker in Moskau im Mai 1927 mitgeteilt und in meiner oben zitierten Arbeit veröffentlicht, bevor ich etwas über die entsprechenden Arbeiten von Prof. Volterra wusste.

[3]) Der letzere ausschliesslich für die positiven Anfangswerte der F. $y_i$ und hauptsächlich in betreff nur einiger specieller Gruppen der D. G. (I) und anderer Lösungssorten, als periodische.

## *ПОПРАВКИ*

Уже по подписании листов к печати автор настоящей работы, Г. Г. Аппельрот, просил внести в авторский текст следующие изменения:

1) Стр. 447, 2-я строка примечания 1, слова «с интегралами Коши» заменить словами «но всегда кусочно (stückweise) аналитическими.

2) Стр. 449, 5-я строка снизу, к словам «обобщенного типа» добавить: «Коши».

3) Стр. 456, 1-я и 2-я строки теоремы IIIa, вместо слов «допускает конечный скачок (ступенчатая прерывность)» должно быть: «делается неопределенным, оставаясь конечным».

4) Стр. 456, 4-я строка той же теоремы, вместо «ступенчатопрерывны» следует: «конечно-неопределенны».

5) Стр. 457, 3-я строка теоремы IIIb, вместо «ступенчато-прерывным» следует: «конечно-неопределенным».

6) Стр. 457, Примечание II (основного текста), вместо «приведенных систем» должно быть: «приведенных (I, III) или (для IIIa, IIIb) неприведенных систем»

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р. О. КУЗЬМИНА

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

Здесь рассматриваются бесконечные системы:

$$x_n = b_n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k; \qquad (n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$$

При этом коэффициенты этих систем подчинены условиям одного из двух видов:

A. $a_{nk} \geqq 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1 - \varphi_n < 1; \quad 0 \leqq b_n < C\varphi_n.$

B. $\sum |a_{nk}| = 1 - \varphi_n < 1; \quad |b_n| < C\varphi_n.$

В обоих случаях $C$ означает некоторую постоянную.

Системы такого вида имеют двоякий интерес. Их простые свойства позволяют изучить их решения довольно полно, в частности они дают возможность находить их приближенные решения. Кроме того эти системы встречаются в ряде приложений.

Изучением подобных систем занимались многие иностранные авторы (Dixon, Pellet, Helge von Koch, Wintner, Walsch и др.). Из русских ученых Б. М. Кояловичу принадлежит большая работа: «Исследования о бесконечных системах линейных уравнений» (Труды Физ.-мат. инст. им. В. А. Стеклова, 1930). К сожалению эта работа содержит существенные ошибки, на наличие которых я обратил внимание в моей статье: «К теории бесконечных систем линейных уравнений» (Труды Физ.-мат. инст. им. В. А. Стеклова, 1931).

В позднейшей статье Б. М. Кояловича: «К теории бесконечных систем линейных уравнений» (Труды Физ.-мат. инст. им. В. А. Стеклова, 1932)

он не признал правильности моих указаний и пытался опровергнуть их. Значит нет оснований ожидать, что он исправит сделанные ошибки. В виду важности вопроса я решил дать новое изложение теории, значительно расширив класс изучаемых уравнений и дополнив рассмотрение новыми результатами.

Следует отметить, что простой способ, каким мне удалось установить существование решений у уравнений A, оказался по существу одинаковым со способом Pellet (1914).

§ 1. **Теорема I.** Если коэффициенты системы $m$ уравнений с $m$ неизвестными:

$$(A_{11}+a_{11})x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m=b_1$$
$$a_{21}x_1+(A_{22}+a_{22})x_2+\ldots a_{2m}x_m=b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_1+\ldots(A_{mm}+a_{mm})x_m=b_m$$

удовлетворяют неравенствам:

$$\sum_{k=1}^{m}|a_{nk}|<A_{nn},$$

то при всяком выборе чисел $b_n$ система имеет решение и притом только одно.

Для доказательства допустим противное. Тогда соответствующая однородная система

$$A_{nn}x_n+\sum_{k=1}^{m}a_{nk}x_k=0 \qquad (*)$$

будет иметь решение, в котором не все неизвестные равны нулю. Выберем то неизвестное, пусть это будет $x_\nu$, которое по абсолютной величине не меньше остальных. Таким образом

$$|x_\nu|=M;\quad |x_\mu|\leqq M;\quad \mu\neq\nu.$$

Одно из ур-ий системы (*) можно переписать так:

$$A_{\nu\nu}x_\nu=-\sum_{k=1}^{m}a_{\nu k}x_k,$$

отсюда получаем

$$A_{\nu\nu}M\leqq\sum_{k=1}^{m}|a_{\nu k}|\cdot|x_k|$$

в силу предположения $|x_k| \leqq M$ и условия $\Sigma|a_{\nu k}| < A_{\nu\nu}$, полученное неравенство невозможно, а с ним отпадает и сделанное допущение.[1]

*Замечание.* Из сказанного следует, что определитель $\Delta$ данной системы отличен от нуля, пока выполняются условия

$$\sum_{k=1}^{m} |a_{nk}| < A_{nn}; \qquad (n = 1, 2, \ldots m)$$

Так как этот определитель непрерывная функция от величин $a_{nk}$, то он не меняет знака при этих условиях, в частности при $a_{nk} = 0$ находим

$$\Delta = A_{11} \cdot A_{12} \cdots \ldots A_{nn} > 0.$$

Поэтому и вообще $\Delta > 0$, если только соблюдены условия: $\Sigma|a_{nk}| < A_{nn}$.

**Теорема II.** Если коэффициенты конечной системы:

$$x_n = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k + b_n; \qquad (n = 1, 2, \ldots m)$$

удовлетворяют неравенствам:

$$a_{nk} \geqq 0; \quad \sum_{k=1}^{m} a_{nk} = 1 - \varphi_n < 1,$$

то система определенная, а значения неизвестных в ней заключены между наибольшей и наименьшей из величин отношений $\frac{b_n}{\varphi_n}$.

Определенность системы непосредственно следует из поставленных неравенств и теоремы I. Пусть $x_\nu = M$ наибольшее из неизвестных. В таком случае из ур-ия

$$x_\nu = \sum_{k=1}^{m} a_{\nu k} x_k + b_\nu$$

благодаря условию $a_{\nu k} \geqq 0$ получаем:

$$M \leqq \sum a_{\nu k} M + b_\nu = M(1 - \varphi_\nu) + b_\nu.$$

Отсюда следует

$$M\varphi_\nu \leqq b_\nu; \quad M \leqq \frac{b_\nu}{\varphi_\nu} \leqq \max \frac{b_n}{\varphi_n}.$$

[1] Факт определенности рассматриваемой системы был повидимому известен еще Гауссу и Якоби. Последний дал способ решения системы по методу последовательных приближений (Werke, Bd. III; 369). Различные доказательства были даны впоследствии многими авторами, в том числе Минковским. Изложенное доказательство встречается в известной книге: Hadamard. Leçons sur la propagation des ondes.

Таким же образом доказывается и неравенство: $x_n \geqq \min \frac{b_n}{\varphi_n}$.

*Следствие.* Если числа $b_n$ удовлетворяют условиям $0 < b_n < C\varphi_n$, то и неизвестные $x_n$ лежат между числами 0 и $C$. Таким образом из положительности чисел $b_n$ вытекает положительность неизвестных. Прямым следствием этого является то, что в данном случае положительны все миноры при разложении определителя данной системы по элементам какой-нибудь строчки.

**Теорема III.** При возрастании коэффициентов $b_n$ и при соблюдении условий

$$\sum a_{nk} = 1 - \varphi_n < 1;\ a_{nk} \geqq 0$$

значения неизвестных в системе

$$x_n = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k + b_n$$

не убывают.

Для доказательства рассмотрим три системы

$$x_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k^{(1)} + b_n + \beta_n;\quad \beta_n \geqq 0$$

$$x_n = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k + b_n \qquad (n = 1, 2, \ldots m)$$

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} \xi_k + \beta_n$$

Очевидно равенство: $x_n^{(1)} = x_n + \xi_n$.

С другой стороны, по предыдущему имеем: $\xi_n \geqq 0$.

Поэтому: $x_n^{(1)} \geqq x_n$, что и требовалось.

§ 2. Переходя к бесконечным системам вида

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k + b_n,$$

сделаем несколько предварительных замечаний. Решением системы будем считать совокупность чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$, после подстановки которых в ур-ия системы каждое из них обратится в тождество, т. е. ряд в правой части равенства будет сходящимся, а сумма его будет равна величине стоящей в левой части равенства.

Это определение является общепринятым.

Один из приемов, иногда ведущий к нахождению решения бесконечных систем, состоит в следующем: В бесконечной системе

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k = b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad (*)$$

отбрасывают ур-ия и неизвестные, номер которых больше некоторого целого числа $m$. После этого получается конечная система, которую мы будем называть укороченной:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k = b_n. \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots m)$$

Пусть $x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}, \ldots$ — решения этой системы.

Если при всяком данном числе $n$ и при $m \to \infty$ оказывается, что $x_n^{(m)} \to x_n$ и если числа $x_1, x_2, x_3, \ldots$, полученные таким образом, удовлетворяют данной системе $(*)$, то они и дают некоторое решение этой бесконечной системы.

Решение, полученное таким образом, назовем главным решением. Не следует думать, что у всяких систем существует главное решение.

Таким образом нахождение предела решения бесконечно удлиняющейся системы ур-ий нетождественно с решением бесконечной системы. Было бы элементарной ошибкой смешать эти два различные вопроса.

В заключение следует еще отметить, что вопрос о единственности решений для бесконечных ур-ий отличается значительной сложностью. В частности, никак нельзя заключать о единственности решения бесконечной системы, исходя только из одного факта определенности укороченной системы с $m$ ур-иями при любом $m$.

Один из наиболее наглядных примеров, показывающих это, принадлежит акад. А. А. Маркову. Идея этого примера весьма проста. Возьмем систему рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$, члены которых положительны, а сумма каждого из этих рядов пусть будет равна единице: $\Sigma a_{nk} = 1$. В таком случае для бесконечной системы:

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

укороченной системой будет такая:

$$x_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k^{(m)}. \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots m)$$

При этом, согласно теореме I, укороченная система будет определенной, так как

$$\sum_{k=1}^{m} a_{nk} < \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1.$$

Поэтому очевидное решение $x_n^{(m)} = 0$ для укороченной системы будет единственным. Так как $\lim_{m\to\infty} x_n^{(m)} = 0$, то $x_n = 0$ и будет главное решение бесконечной системы. Но это решение не единственное. Система имеет другое очевидное решение, а именно $x_n = 1$, после подстановки которого в ур-ия они обратятся в тождество в силу выбора чисел $a_{nk}$.

Такова напр. система:

$$x_n = e^{-n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k}{k!} x_k; \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

§ 3. **Основная теорема.** Система, принадлежащая к классу A:

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_n + b_n$$

имеет главное решение, причем величины неизвестных в этом решении заключены между числами нуль и $C$.

Рассмотрим две укороченных системы:

$$x_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k^{(m)} + b_n; \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots m) \qquad (*)$$

$$x_n^{(m+\mu)} = \sum_{k=1}^{m+\mu} a_{nk} x_k^{(m+\mu)} + b_n; \quad (n = 1, 2, 3 \ldots m+\mu)$$

Согласно теореме II и ее следствиям (§ 1) обе эти системы определенные, так как $a_{nk} \geqq 0$ и:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{nk} = 1 - \varphi_n - R_m < 1$$

$$\sum_{k=1}^{m+\mu} a_{nk} = 1 - \varphi_n - R_{m+\mu} < 1.$$

Здесь

$$R_n = \sum_{m+1}^{\infty} a_{nk} \geqq 0; \quad R_{m+\mu} = \sum_{m+\mu+1}^{\infty} a_{nk} \geqq 0.$$

В силу тех же теорем и благодаря неравенствам:

$$b_n < C\varphi_n \leqq C(\varphi_n + R_{m+\mu}) \leqq C(\varphi_n + R_m)$$

заключаем, что величины $x_n^{(m)}$ и $x_n^{(m+\mu)}$ находятся в промежутке между числами нуль и $C$.

При этом из ур-ий (*) можно получить и такие:

$$x_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k^{(m)} + b_n$$

$$(n = 1, 2, \ldots m) \quad (**)$$

$$x_n^{(m+\mu)} = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k^{(m+\mu)} + b_n^{(1)}$$

Здесь

$$b_n^{(1)} = b_n + \sum_{m+1}^{m+\mu} a_{nk} x_k^{(m+\mu)} \geqq b_n,$$

так как $x_k^{(m+\mu)} \geqq 0$.

При сравнении систем (**) в силу теоремы II § 1 заключаем, что благодаря неравенствам $b_n \leqq b_n^{(1)}$ должно быть:

$$x_n^{(m)} \leqq x_n^{(m+\mu)}.$$

Таким образом величины $x_n^{(m)}$ при увеличении значка $m$ не убывают. Будучи ограничены сверху, они стремятся к пределам, которые мы обозначим через $x_n$. Таким образом, при любом данном $n$ имеем: $\lim\limits_{m\to\infty} x_n^{(m)} \to x_n$. При этом величина $x_n^{(m)}$ при своем изменении не превосходит числа $C$. Поэтому и ее предел, т. е. $x_n$, не больше чем $C$. Остается еще выяснить, удовлетворяют ли найденные пределы данной системе. Для этого обозначим через $\xi_n^{(m)}$ величину, определенную условиями:

$$\xi_n^{(m)} = x_n^{(m)} \text{ при } n \leqq m; \quad \xi_n^{(m)} = 0 \text{ при } n > m.$$

Ясно, что числа $\xi_n^{(m)}$ удовлетворяют уравнениям

$$\xi_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \xi_n^{(m)} + b_n; \qquad (n = 1, 2, \ldots m); \quad (***)$$

Придадим числу $n$ определенное значение и будем увеличивать $m$ беспредельно. Ряд в правой части последнего равенства будет равномерно сходящимся, так как $0 \leqq \xi_k^{(m)} < C$ при любых $k$ и $m$, а ряд $\Sigma a_{nk}$ абсолютно

сходящийся. Поэтому в равенстве (***) допустим почленный переход к пределу, который дает

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k + b_n.$$

Так как рассуждение пригодно при всяком заданном $n$, то числа

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

дают решение системы. Это и будет главное решение.

*Следствие.* При возрастании свободных членов $b_n$ в системе

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k + b_n,$$

удовлетворяющей условиям A, значения неизвестных $x_n$ не убывают.

Для доказательства возьмем какие-нибудь числа $\beta_n \geqq 0$ и рассмотрим три системы

$$x_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k^{(1)} + b_n$$

$$x_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k^{(2)} + \beta_n$$

$$x_n^{(3)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k^{(3)} + b_n + \beta_n$$

а также их укороченные системы

$$\xi_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} \xi_n^{(m)} + b_n$$

$$\eta_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} \eta_n^{(m)} + \beta_n$$

$$\zeta_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} \zeta_n^{(m)} + b_n + \beta_n.$$

Очевидно равенство:

$$\xi_n^{(m)} + \eta_n^{(m)} = \zeta_n^{(m)}.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$x_n^{(1)} + x_n^{(2)} = x_n^{(3)}.$$

По основной теореме числа $x_n^{(2)} \geqq 0$ в силу $\beta_n \geqq 0$. Поэтому $x_n^{(3)} \geqq x_n^{(1)}$. В виду произвольности выбора неотрицательных чисел $\beta_n$ это и доказывает справедливость утверждения.

§ 4. **Теорема.** Пусть

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k + b_n$$

система, удовлетворяющая условиям $A$, а $x_n = \xi_n$ ее главные решения. В таком случае главные решения системы

$$x_n = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk} x_k + b_n + \sum_{k=1}^{m} a_{nk} \xi_k; \quad (n = m+3, m+2, \ldots)$$

будут совпадать с главными решениями данной системы.

Прежде всего в силу неравенств в $b_n \leqq C\varphi_n$ находим: $\xi_n \leqq C$. Затем имеем

$$\sum_{m}^{\infty} a_{nk} = \sum_{1}^{\infty} a_{nk} - \sum_{1}^{m} a_{nk} = 1 - \varphi_n - \sum_{1}^{m} a_{nk} = 1 - \psi_n.$$

Кроме того

$$b_n + \sum_{1}^{m} a_{nk} \xi_k < C\varphi_n + \sum_{1}^{m} a_{nk} C = C\psi_n.$$

Поэтому система

$$x_n = \sum_{m+1}^{\infty} a_{nk} x_k + b_n^{(1)}, \quad (n = m+1, m+2, \ldots) \; (*)$$

где

$$b_\mu^{(1)} = b_n + \sum_{1}^{m} a_{nk} \xi_k$$

подходит под условия теоремы § 3 и, следовательно, имеет главное решение.

После этого предварительного замечания введем обозначения:

1. $\xi_n$ — главные решения данной системы.

2. $x_n^{(m+\mu)}$ — решения укороченной системы с $m+\mu$ неизвестными, получающейся из данной.

3. $\xi_n^{(\mu)}$ — решения укороченной системы с $\mu$ неизвестными, получающейся из системы $(*)$.

Числа $x_n^{(m+\mu)}$, $\xi_n^{(\mu)}$, $\xi_n$ удовлетворяют системам ур-ий:

$$x_n^{(m+\mu)} = \sum_{k=m+1}^{m+\mu} a_{nk} x_k^{(m+\mu)} + \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k^{(m+\mu)} + b_n$$

$$\xi_n^{(m)} = \sum_{m+1}^{m+\mu} a_{nk} \xi_k^{(m)} + \sum_{1}^{m} a_{nk} \xi_k + b_n$$

$$\xi_n = \sum_{m+1}^{m+\mu} a_{nk} \xi_k + \sum_{1}^{m} a_{nk} \xi_k + \sum_{m+\mu+1}^{\infty} a_{nk} \xi_k + b_n.$$

Здесь числа $x_n^{(m+\mu)}$ при возрастании $\mu$ не убывают и стремятся к числам $\xi_n$. Поэтому, пользуясь неравенством $\xi_n \geqq 0$, находим

$$\sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k^{(m+\mu)} + b_n \leqq \sum_{k=1}^{m} a_{nk} \xi_k + b_n \leqq \sum_{1}^{m} a_{nk} \xi_k + \sum_{m+\mu+1}^{\infty} a_{nk} \xi_k + b_n.$$

Отсюда на основании теоремы III § 1 следует: $x_n^{(m+\mu)} \leqq \xi_n^{(\mu)} < \xi_n$. Так как при $\mu \to \infty$ имеем $x_n^{(m+\mu)} \to \xi_n$, то тем более $\xi_n^{(\mu)} \to \xi_n$.

*Замечание.* Можно придать главные значения любым другим неизвестным. Находя значения остальных неизвестных из соответствующей системы, придем к тем же главным значениям, что и в данной системе. Для доказательства заметим, что от перенумерования конечного числа неизвестных и соответствующей перестановки ур-ий рассматриваемые системы не меняют своего типа, а также и величины главных значений.

**§ 5.** Если при соблюдении прежних условий:

$$a_{nk} \geqq 0; \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1 - \varphi_n < 1;$$

положить $b_n = \varphi_n$, т. е. если соблюдены условия $\Sigma a_{nk} + b_n = 1$, то система

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k + b_n$$

имеет очевидное решение: $x_n = 1$. Будет ли это решение главным? Если система имеет вообще единственное решение, то указанное решение должно совпадать с главным. Вообще же говоря, такое совпадение не всегда имеет место. Для доказательства этого утверждения рассмотрим систему:

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) x_{2n} + \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k(k+1)} + \frac{1}{4n}; \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

В данном случае

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{4n}; \quad \varphi_n = \frac{1}{4n} > 0.$$

При этом условие: $a_{nk} > 0$ очевидно выполняется. Кроме того

$$b_n = \frac{1}{4n} = \varphi_n.$$

Поэтому условия $b_n < C\varphi_n$ тоже налицо. Система имеет очевидное решение: $x_n = 1$. Подставляя его в ур-ия системы, получаем тождества:

$$1 = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{4n}; \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Чтобы узнать, будет ли это решение главным, рассмотрим укороченную систему, взяв число неизвестных и ур-ий равным $2^m$. Она имеет вид:

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) x_{2n} + \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2^m} \frac{x_k}{k(k+1)} + \frac{1}{4n}; \quad n \leqq 2^{m-1}$$

$$x_n = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2^m} \frac{x_k}{k(k+1)} + \frac{1}{4n}; \quad 2^{m-1} < n \leqq 2^m$$

Пользуясь теоремами § 1, легко убедиться, что все числа $x_n$ заключены между нулем и единицей. Заменяя под знаком суммы эти величины $x_k$ единицей, получим неравенства

$$x_n < \left(1 - \frac{1}{2n}\right) x_{2n} + \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{4n}; \quad n \leqq 2^{m-1}$$

$$x_n < \frac{1}{4n} \sum \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{4n}; \quad n > 2^{m-1}.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}
x_1 &< \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} \\
x_2 &< x_4 + \frac{1}{4} \\
x_4 &< x_8 + \frac{1}{8} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
x_{2^{m-1}} &< x_{2^m} + \frac{1}{2^m} \\
x_{2^m} &< \frac{1}{2^{m+1}}.
\end{aligned}$$

Помножая первую строчку на 2 и складывая, по сокращении имеем:

$$2x_1 < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \frac{1}{2^{m+1}} < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Таким образом при всяком $m$ оказывается $x_1 < \frac{3}{4}$. Так как при возрастании числа ур-ий и неизвестных в укороченной системе величины неизвестных стремятся к пределу, то величины, взятые из укороченных ур-ий с $2^m$ неизвестными, стремятся к тому же пределу. В силу найденного этот предел для неизвестного $x_1$ не больше чем $\frac{3}{4}$.

Таким образом для данного случая главное решение системы, у которой $b_n = \varphi_n$ не совпадает с очевидным решением, $x_n = 1$. Это и показывает, что вопрос, поставленный в начале этого параграфа, иногда имеет отрицательный ответ.

*Замечание.* В «Исследованиях» В. М. Кояловича в § 21 доказывается лемма III, согласно которой главные решения для рассматриваемых им систем в подобных случаях всегда равны единице. Система, которую рассматривает автор, имеет несколько иной вид, но это несущественно. Легко придумать пример, имеющий в точности ту же форму, что и его система Им является хотя бы такая система

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} y_k + b_n$$

$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} x_n + \beta_n,$$

где

$$a_{nk} = \frac{1}{4n} \cdot \frac{1}{k(k+1)}; \quad k \neq 2n; \quad a_{nk} = \frac{1}{4n} \cdot \frac{1}{k(k+1)} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right), \quad k = 2n;$$

$$\alpha_{nk} = a_{nk}; \quad b_n = \beta_n = \frac{1}{4n}.$$

Лемма III в построении «Исследования» имеет весьма существенное значение. С ее неверностью падает в частности вывод лимитантов, имеющих столь важное значение в «Исследованиях».

§ 6. Монотонность изменения неизвестных в системах рассматриваемого вида при возрастании чисел $b_n$ позволяет находить оценки сверху и снизу для значений неизвестных. Особенно просто это можно сделать

в тех случаях, когда система имеет единственное решение. При этом достаточно найти системы чисел $\xi_n$ и $\eta_n$ таких, чтобы выполнялись неравенства

$$\xi_n - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\xi_k < b_n < \eta_n - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\eta_k \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

После этого для неизвестных данной системы

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k + b_n, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad (*)$$

получаются оценки снизу и сверху:

$$\xi_n < x_n < \eta_n$$

Если система (*), рассматриваемого типа такова, что главным решением системы

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k + \varphi_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

является решение $x_n = 1$, то найдя главные значения нескольких первых неизвестных

$$x^1 = \xi_1; \quad x^2 = \xi_2; \ldots x_m = \xi_m$$

с помощью их можно указать верхний и нижний пределы для значений всех остальных неизвестных.

Для этого заметим прежде всего, что по § 4 можно подставить вместо

$$x_1, x_2 \ldots x_m$$

их главные значения $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$. Определяя остальные неизвестные $x_n$ при $n > m$ из ур-ий, номера которых больше чем $m$, мы придем к тем же главным значениям, как и непосредственно из данной системы. Поступая подобным образом, находим

$$x_n = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk}x_k + b_n + \sum_{k=1}^{m} a_{nk}\xi_k \qquad (n = m+1, \; m+2, \ldots) \; (**)$$

Пусть при всех значениях $n > m$ оказывается:

$$h\left(\varphi_n + \sum_{k=1}^{m} a_{nk}\right) < b_n + \sum_{k=1}^{m} a_{nk}\xi_k < H\left(\varphi_n + \sum_{k=1}^{m} a_{nk}\right)$$

В таком случае, согласно закону монотонности находим, что главные значения неизвестных в системе (**) заключены по величине между главными значениями неизвестных в системах

$$x_n^{(1)} = \sum_{m+k}^{\infty} a_{nk} x_k^{(1)} + h\left(\varphi_n + \sum_{k=1}^{m} a_{nk}\right)$$

$$x_n^{(2)} = \sum_{m+1}^{\infty} a_{nk} x_k^{(2)} + H\left(\varphi_n + \sum_{k=1}^{m} a_{nk}\right) \qquad (***)$$

т. е. должны выполняться неравенства: $x_n^{(1)} \leqq x_n \leqq x_n^{(2)}$. При этом системы (***) имеют очевидные решения:

$$x_n^{(1)} = h; \quad x_n^{(2)} = H.$$

Если эти решения главные, то $h \leqq x_n \leqq H$, иначе говоря, в тех случаях, когда очевидное решение системы

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_n + \varphi_a$$

совпадает с главным, и если главные значения неизвестных $x_1, x_2 \ldots x_m$ известны, то главные значения остальных неизвестных заключены между наибольшей и наименьшей из величин отношений:

$$\frac{b_n + \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k}{\varphi_n + \sum_{k=1}^{m} a_{nk}}, \quad n > m.$$

Условия, которыми пришлось обставить эту теорему довольно сложны. Однако, в дальнейшем мы найдем случаи, когда можно будет убедиться, что они выполнены.

*Замечание.* Теорема § 23 «Исследований» Б. М. Кояловича по существу совпадает с только что доказанной. Однако, условия Б. М. Кояловича слишком широки. При этих расширенных условиях теорема вообще говоря неверна. Те системы, которые он рассматривает

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} y_k + b_n$$

$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} x_k + \beta_n,$$

могут быть написаны в виде одной

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}\xi_k + B_n.$$

Для этого нужно положить:

$$x_n = \xi_{2\nu-1}; \quad y_n = \xi_{2\nu}; \quad A_{2\nu-1,2\mu-1} = 0; \quad A_{2\nu-1,2\mu} = a_{nk};$$
$$A_{2\nu,2\mu} = 0; \quad A_{2\nu,2\mu-1} = \alpha_{nk}.$$

Таким образом те две системы, которые он рассматривает, лишь обозначением отличаются от одной системы, рассматриваемой здесь.

§ 7. Для действительности оценки неизвестных, данной в предыдущем параграфе, важно знать, имеет ли система единственное решение или нет. Только в первом случае можно ручаться за то, что оценка справедлива, поэтому представляется существенным выяснение вопроса о единственности решения системы. Внесем одно ограничение, рассматривая лишь ограниченные решения, у которых совокупность абсолютных значений неизвестных ограничена сверху.

Для систем рассмотренного вида единственность ограниченных решений вообще говоря не имеет места. Не существует она и в том случае, если на систему наложены более ограничительные условия

$$a_{nk} > 0; \quad \sum a_{nk} = 1 - \varphi_n < 1; \quad 0 < b_n < c\varphi_n.$$

Справедливость сказанного достаточно подтверждается двумя примерами, приведенными мной в прошлой статье («к Теории бесконечных систем уравнений»).

В § 5 настоящей работы приведен еще один пример не единственности решения у систем такого рода. Система, рассматривавшаяся там, имела очевидное решение: $x_n = 1$ и другое, в котором выполнялось неравенство:

$$x_1 < \frac{3}{4}.$$

Однако все три приведенных примера имели несколько искусственный характер, делающий маловероятным появление таких примеров в вопросах прикладного характера. Естественно, что некоторая вычурность в законе составления коэффициентов в приведенных примерах не лежит в существе дела. В этом отношении мне кажется достаточно убедительным следующий пример. Рассмотрим систему:

$$x_n = \frac{e^{-(n+1)}}{n+1} + e^{-(n+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+1)^k}{k!} x_k; \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \; (*)$$

В данном случае имеем:

1) $$a_{nk} = e^{-(n+1)}\frac{(n+1)^k}{k!} > 0$$

2) $$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = e^{-(n+1)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n+1)^k}{k!} = e^{-(n+1)}(e^{n+1}-1) = 1 - e^{-(n+1)};$$

$$\varphi_n = e^{-(n+1)} > 0$$

3) $$b_n : \varphi_n = \frac{e^{-(n+1)}}{n+1} : e^{-(n+1)} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}; \quad b_n > 0.$$

Главное решение этой системы мне неизвестно. По доказанному в § 3 все значения неизвестных в этом главном решении должны лежать между числами нуль и половина.

Однако, эта система имеет и другое решение, в котором неизвестные выражены формулой: $x_n = \frac{1}{n+1} - 1$. Подставляя эти значения в одно из ур-ий системы (*), предварительно помноженное на $e^{n+1}$, находим:

1) $$e^{n+1}x_n = e^{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - 1\right) = \frac{e^{n+1}}{n+1} - e^{n+1}.$$

2) $$\frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n+1)^k x_k}{k!} = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{k+1} - 1\right)(n+1)^k}{k!} =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n+1)^k}{(k+1)!} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n+1)^k}{k!} =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{e^{n+1} - 1 - (n+1)}{n+1} - (e^{n+1} - 1) = \frac{e^{n+1}}{n+1} - e^{n+1}.$$

Так как приведенное вычисление справедливо при всяком значении числа $n$, то $x_n = \frac{1}{n+1} - 1$ есть решение системы. Это решение очевидно отличается от главного, так как ни одно из чисел $x_n$ не лежит в интервале

$$\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

В дальнейших параграфах мы дадим некоторые результаты относительно единственности решения изучаемых систем ур-ий.

§ 8. Прежде всего отметим один простой случай, где единственность конечных решений устанавливается весьма легко.

**Теорема.** Если при всех значениях числа $n$ величина $\Sigma|a_{nk}|$ остается меньше одной и той же правильной дроби $\theta$, то система

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k + b_n$$

не может иметь двух разных конечных решений.

Допустим противное. В таком случае должна иметь решение, отличная от нулевого, соответствующая однородная система

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad (*)$$

Пусть $M$ точная верхняя граница чисел: $x_1, x_2, x_3 \ldots$

Возьмем произвольное положительное число $\varepsilon$. Пусть $x_\nu$ будет тем из неизвестных, абсолютное значение которого отличается от $M$ меньше, чем на $\varepsilon$. Тогда из соответствующего ур-ия системы $(*)$:

$$x_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu k} x_\nu$$

получается неравенство:

$$M - \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| M < \theta M.$$

Отсюда следует:

$$M < \frac{\varepsilon}{1-\theta}.$$

В виду произвольности $\varepsilon$ получаем $M = 0$ и теорема доказана.

*Замечание.* Этот случай единственности отмечен повидимому Диксоном. Система, о которой говорилось, может иметь коэффициенты разных знаков и даже комплексные. В дальнейшем будет доказано, что она всегда имеет конечное решение при любых конечных числах $b_n$.

§ 9. Систему

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k + b_n;$$

можно решать по методу последовательного приближения, следуя пути, указанному Якоби для конечных систем ур-ий. При этом полагаем:

$$x_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k^{(m-1)} + b_n.$$

Значение первого приближения, т. е. числа $x_n^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$, ... можно выбирать произвольно. Если этот процесс будет сходящимся и приведет к ограниченной системе предельных чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$ то это будут решения данной системы.

Рассмотрим случай однородной системы:

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k. \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \ (*)$$

За первое приближение возьмем числа:

$$x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = x_3^{(1)} = \ldots = 1$$

в этом случае находим

$$x_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k^{(1)} = \sum a_{nk} = 1 - \varphi_n < x_n^{(1)}.$$

Таким же образом получаем:

$$x_n^{(3)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k^{(1)} < \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k^{(1)} = x_n^{(1)}.$$

Вообще в этом случае оказывается: $x_n^{(m)} < x_n^{(m-1)}$.

Каждая из убывающих конечных положительных переменных $x_n^{(m)}$ при $m \to \infty$ стремится к определенному пределу $x_n$. Числа $x_n$ будут решениями системы $(*)$ в силу равномерной сходимости каждого из рядов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_n^{(m-1)}.$$

Если решение системы $(*)$ единственное: $x_n = 0$, то должно быть

$$x_n^{(m)} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty$$

и любом данном $n$. Величины $x_n^{(m)}$ могут быть выражены и иначе, непосредственно через величины $x_n^{(1)}$. В самом деле имеем

$$x_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(m)} x_k^{(1)}. \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

При этом очевидно должны соблюдаться равенства:

$$a_{nk}^{(2)} = a_{nk}; \quad a_{nk}^{(3)} = \sum_{k_1=1}^{\infty} a_{nk} a_{kk_1}^{(2)} \ldots a_{nk}^{(m)} = \sum_{k_1=1}^{\infty} a_{nk} a_{kk_1}^{(m-1)}.$$

Нетрудно убедиться в абсолютной сходимости всех этих рядов. Пусть числа $x_n^{(1)}$ при всех $n$ меньшие по абсолютной величине, чем некоторое положительное число $M$. Тогда имеем

$$0 \leqq x_n^{(m)} < M \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(m)}. \qquad (**)$$

При этом ряд $\sum a_{nk}^{(m)}$ представляет как раз то значение величины $x_n^{(m)}$, какое получается для нее при условии $x_n^{(1)} = 1$. Если система имеет единственное решение, то $\sum a_{nk}^{(m)} \to 0$ при $m \to \infty$. Поэтому и величина $x_n^{(m)} \to 0$ при любых значениях чисел: $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots$, лишь бы их совокупность была ограничена по модулю.

Таким образом замечаем, что если процесс последовательных приближений при $x_n^{(1)} = 1$ оказывается сходящимся к нулевому решению, то тогда в силу неравенства (**), он приведет к нулевому решению и при всяком ином выборе системы значений: $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)} \ldots$ лишь бы модули этих чисел имели конечную верхнюю границу. В этом случае система (*) имеет единственное конечное решение. В самом деле, если бы существовало иное решение: $x_n = \xi_n$, то взяв за первое приближение числа $\xi_n$ имели бы:

$$x_n^{(1)} = \xi_n, \quad x_n^{(2)} = \xi_n, \quad \ldots x_n^{(m)} = \xi_n.$$

При этом равенство $x_n^{(m)} \to 0$ не могло бы существовать.

Таким образом справедлива теорема:

Если система (A) имеет единственное решение, то алгорифм последовательных приближений сходится к нулю при любых конечных значениях начальных чисел $x_n^{(1)}$. Если же известно, что алгорифм последовательных приближений сходится к нулю при начальных значениях $x_n^{(1)} = 1$, то система имеет единственное конечное решение.

§ **10.** Применяя подобным же образом метод последовательных приближений к неоднородной системе

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k + b_n$$

у которой:

$$a_{nk} \geqq 0, \quad \sum a_{nk} = 1 - \varphi_n < 1; \quad 0 < b_n < c\varphi_n$$

найдем:

$$x_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(m)} x_k^{(1)} + b_n + b_n^{(1)} + \ldots b_n^{(m-1)}; \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Здесь числа $b_\nu^{\nu}$ определяются формулами:

$$b_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} b_k; \quad b_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} b_n^{(1)}, \quad b_n^{(3)} = \sum a_{nk} b_n^{(2)}, \ldots$$

Числа $a_{nk}^{(m)}$ имеют то же значение, что и в § 9.

Если за первое приближение к решению данной системы взять числа

$$x_n^{(1)} = x_n,$$

то тогда очевидно:

$$x_n^{(1)} = x_n^{(2)} = \ldots = x_n.$$

Таким образом получается:

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(m)} x_k + b_n + b_n^{(1)} + \ldots b_n^{(m-1)}$$

В тех случаях, когда система имеет единственное решение, однородная система имеет лишь нулевое решение. При таких условиях, согласно предыдущему окажется

$$\lim_{m\to} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(m)} x_k = 0.$$

Поэтому решение данной неоднородной системы получается представленным в виде ряда:

$$x_n = b_n + b_n^{(1)} + b_n^{(2)} + \ldots$$

Этот ряд состоит из положительных членов, поэтому его сходимость абсолютная.

Если принять другие конечные значения за первое приближение

$$x_1^{(1)}, \ x_2^{(1)}, \ x_3^{(1)} \ldots,$$

то для приближения порядка $m$ получим:

$$x_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(m)} x_n^{(1)} + b_n + b_n^{(1)} \ldots b_n^{(m-1)}.$$

Так как в случае единственности решения величина бесконечной суммы стремится к нулю, а величина суммы чисел $b_n^{(m)}$ приближается к $x_n$, то получаем теорему: если система

$$x_n = \sum a_{nk} x_k + b_n$$

имеет единственное конечное решение, то алгорифм последовательного приближения будет сходящимся к решению данной системы при любых начальных значениях неизвестных $x_n^{(1)}$, лишь бы ограниченных сверху по модулю.

§ 11. Только что найденные результаты, позволяют установить некоторые теоремы для ур-ий (B), коэффициенты которых удовлетворяют условиям:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < 1.$$

Рассмотрим две однородные системы

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \qquad (A)$$

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \xi_k \qquad (B)$$

коэффициенты которых удовлетворяют условиям A и B и при том

$$|\alpha_{nk}| \leq a_{nk}.$$

Составляя последовательные приближения для обеих систем по формулам § 9, находим:

$$x_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(m)} x_k^{(1)}$$

$$\xi_n^{(m)} = \sum \alpha_{nk}^{(m)} \xi_k^{(1)}$$

В виду того, что числа $a_{nk}^{(m)}$ и $\alpha_{nk}^{(m)}$ составлены одинаковым путем с помощью сложений, умножений и переходов к пределам из чисел $a_{nk}$ и $\alpha_{nk}$, имеем очевидные неравенства

$$\left|\alpha_{nk}^{(m)}\right| \leq a_{nk}^{(m)}.$$

Поэтому в том случае, когда система

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_{nk}$$

имеет единственное конечное решение и когда, благодаря этому,

$$\sum a_{nk}^{(m)} \to 0,$$

будем иметь:

$$|\xi_n^{(m)}| \leqq \sum a_{nk}^{(m)} \cdot |\xi_n^{(1)}| \to 0,$$

если только совокупность чисел $\xi_k^{(1)}$ ограничена сверху.

Отсюда, очевидно, вытекает единственность конечных решений для системы:

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \xi_k.$$

Таким образом имеем теорему:

Если система (A):

$$x_n = \sum a_{nk} x_k; \quad a_{nk} \geqq 0, \quad \sum a_{nk} < 1$$

имеет единственное конечное решение, то решение любой другой системы (B):

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \xi_k$$

с меньшими по абсолютной величине коэффициентами тоже единственное.

Таким же образом, рассматривая две системы:

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k + b_n$$

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \xi_k + \beta_n,$$

коэффициенты которых удовлетворяют условиям:

$$|\alpha_{nk}| \leqq a_{nk}; \quad |\beta_n| \leqq b_n; \quad \sum a_{nk} = 1 - \varphi_n; \quad b_n < c\varphi_n,$$

находим

$$x_n^{(m)} = \sum a_{nk}^{(m)} x_k^{(1)} + b_n + b_n^{(1)} + \ldots b_n^{(m-1)}$$

$$\xi_n^{(m)} = \sum \alpha_{nk}^{(m)} \xi_k^{(1)} + \beta_n + \beta_n^{(1)} + \ldots + \beta_n^{(m-1)}.$$

Сравнение этих формул показывает наличие неравенств:

$$|\alpha_{nk}^{(m)}| \leqq a_{nk}^{(m)}; \quad |\beta_n^{(m)}| \leqq b_n^{(m-1)}.$$

Поэтому ряд $\beta_n + \beta_n^{(1)} + \beta_n^{(2)} + \dots$ абсолютно сходящийся, а величина

$$\sum \alpha_{nk}^{(m)} \xi_k^{(1)}$$

меньшая по модулю, чем

$$\sum a_{nk}^{(m)} |\xi_k^{(1)}|$$

стремится к нулю, если числа $|\xi_k^{(1)}|$ ограничены сверху и если система:

$$x_n = \sum a_{nk} x_k + b_n$$

определенная.

Поэтому

$$\xi_n = \lim_{m \to \infty} \xi_n^{(m)} = \beta_n + \beta_n^{(1)} + \beta_n^{(2)} + \dots$$

Нетрудно видеть, что числа $\xi_n$ и будут решениями системы:

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \xi_k + \beta_n.$$

Таким образом принцип сравнения справедлив и для неоднородных систем, давая теорему:

**Теорема.** Если система с положительными коэффициентами

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} x_k + b_n,$$

у которой выполняется условие (А), имеет единственное конечное решение, то и система (В)

$$\xi_n = \sum \alpha_{nk} \xi_k + \beta_n$$

тоже имеет конечное решение и при том единственное, если только выполняются условия:

$$|\alpha_{nk}| \leqq a_{nk}; \quad |\beta_n| \leqq b_n.$$

При этом решения второй системы могут быть получены по методу последовательных приближений и по абсолютной величине не больше, чем решения первой системы.

Таким образом вопрос о единственности имеет важное значение не только при оценке главных решений, но и в вопросе сходимости алгорифма последовательных приближений.

В заключение отметим еще один результат из теории систем (В).

**Теорема.** Система:

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k + b_n$$

у которой

$$\sum |a_{nk}| = 1 - \varphi_n < 1; \quad |b_n| < c\varphi_n$$

имеет по крайней мере одно конечное решение. Оно может быть получено путем последовательных приближений, если за первые приближения взять числа $b_n$.

Для доказательства рассмотрим сначала систему:

$$\xi_n = \sum \alpha_{nk} \xi_k + \beta_n,$$

$$\alpha_{nk} = |a_{nk}|; \quad \beta_n = |b_n|.$$

Будем составлять для нее последовательные приближения, полагая

$$\xi_n^{(1)} = c.$$

Для приближения порядка $m$ получим формулу:

$$\xi_n^{(m)} = c \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}^{(m)} + \beta_n + \beta_n^{(1)} + \ldots + \beta_n^{(m-1)}. \qquad (*)$$

При этом величина $\sum \alpha_{nk}^{(m)}$ представляет приближение порядка $m$, получаемое при решении однородной системы:

$$\xi_n = \sum \alpha_{nk} \xi_k \qquad (**)$$

если за первые приближения взять единицу. Согласно сказанному в § 9 величины $\sum \alpha_{nk}^{(m)}$ должны стремиться к определенным пределам, которые будут решениями системы (**). Обозначим эти пределы через $\eta_n$. С другой стороны, нетрудно показать, что величины $\xi_n^{(m)}$ убывают при возрастании $m$, оставаясь положительны. Поэтому они стремятся к пределам, которые будут решениями системы:

$$\xi_n = \sum \alpha_{nk} \xi_k + \beta_n$$

как это видно из равномерной сходимости правой части Ф-лы:

$$\xi_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \xi_k^{(m-1)} + \beta_n.$$

В силу сказанного Ф-ла (*) при $m \to \infty$ дает в пределе такую:

$$\xi_n = c\eta_n + \beta_n + \beta_n^{(1)} + \beta_n^{(2)} + \dots$$

Так как числа $\beta_n^{(m)}$ не отрицательны, то ряд $\sum \beta_n^{(m)}$ абсолютно сходящийся.

Переходя к системе $x_n = \sum a_{nk} x_n + b_n$, будем составлять последовательные приближения, взяв за первое приближение величины $b_n$. Тогда для приближения порядка $m$ получим Ф-лу:

$$x_n^{(m)} = b_n + b_n^{(1)} + b_n^{(2)} + \dots b_n^{(m-1)}.$$

В силу очевидных неравенств $|b_n^{(m)}| \leq \beta_n^{(m)}$ ряд

$$b_n + b_n^{(1)} + b_n^{(2)} + \dots$$

абсолютно сходящийся. Поэтому сходится и алгорифм последовательных приближений, причем:

$$x_n = b_n + b_n^{(1)} + b_n^{(2)} + \dots$$

Числа $x_k$ будут решениями систем, так как ряд в правой части Ф-лы:

$$x_n^{(m)} = \sum a_{nk} x_n^{(m-1)} + b_n$$

равномерно сходится в силу неравенства: $|x_n^{(m-1)}| < \xi_n^{(m-1)} < c$ и абсолютной сходимости ряда $\sum a_{nk}$, члены которого не зависят от $m$.

§ 12. С целью нахождения примера системы, имеющей единственное конечное решение, рассмотрим задачу об изгибе квадратной пластинки с заделанными краями со стороною $\pi$.

Вопрос может быть сведен к решению системы:[1]

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} = \frac{1}{S_n} \sum_{r=1,3,5\dots} \frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}} 16 A_r}{\pi (n^2 + r^2)^2} + \frac{16}{\pi n S_n}; \quad (n = 1, 3, 5 \dots) \quad (*)$$

Здесь положено:

$$S_n = \frac{\pi n + sh\, \pi n}{ch^2 \frac{\pi n}{2}}.$$

Вводя обозначение:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} A_n = x_k$$

[1] См. С. П. Тимошенко. Курс теории упругости, 1916, ч. II, стр. 298—302. Следует отметить, что на стр. 301 автор допускает законность перестановки порядка суммирования. Если считать числа $A_n$ ограниченными сверху по модулю, то перестановка законна, в виду абсолютной сходимости рядов.

получаем систему:

$$x_\nu = \frac{1}{S_{2\nu-1}} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{16 x_\mu}{\pi [(2\nu-1)^2 + (2\mu-1)^2]^2} + \frac{16}{\pi (2\nu-1) S_{2\nu-1}}.$$

Если бы эта система имела два разных конечных решения, то соответствующая однородная система имела бы решение, отличное от нуля. Отсюда, восходя обратно по пути рассуждений книги С. П. Тимошенко, можно получить, что существует ограниченный по модулю ряд чисел: $A_1, A_2, A_3 \ldots$ таких, что для бигармонической функции $u$:

$$u = \sum \frac{A_n}{n^2 ch^2 \frac{\pi n}{2}} (Y_n \cos nx + X_n \cos ny)$$

на сторонах квадрата выполняются краевые условия: $u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

При этом функция $X_n$ определяется равенством:

$$X_n = \pi sh \frac{\pi n}{2} ch\, nx - 2x\, sh \frac{\pi n}{2} sh nx,$$

а функция $Y_n$ получается из $X_n$ заменой буквы $x$ на $y$. В виду этих краевых заданий и единственности бигармонической функции с данными краевыми условиями находим, что при:

$$|x| \leqq \frac{\pi}{2}; \quad |y| \leqq \frac{\pi}{2}$$

справедливо равенство:

$$u = \sum_{n=1,3,5\ldots} \frac{A_n}{n^2 ch^2 \frac{\pi n}{2}} (Y_n \cos nx + X_n \cos ny) = 0 \qquad (*)$$

Функцию $u$ внутри квадрата со стороной $\pi$ можно разложить по косинусам нечетных кратных углов $x$ и $y$ и притом единственным образом. При этом, находя коэффициенты $a_{nm}$ по формуле:

$$a_{nm} = \frac{4}{\pi^2} \iint_S u \cos nx \cos my\, dx\, dy$$

ряд (*) можно интегрировать почленно в виду его равномерной сходимости внутри и на контуре. Так как $u = 0$, то и величина $a_{nm} = 0$.

Поэтому из равенства (*) при нечетных $m$ и $n$ находим:

$$\frac{A_n}{n^2 ch^2 \frac{\pi n}{2}} C_{nm} + \frac{A_m}{m^2 ch^2 \frac{\pi n}{2}} C_{mn} = 0. \qquad (**)$$

Здесь через $C_{nm}$ обозначен коэффициент при $\cos my$ в разложении функции $Y_n$ по косинусам нечетных кратных угла $y$. Известно равенство

$$\frac{C_{nm}}{n^2\, ch^2 \frac{\pi n}{2}} = \frac{16m(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\pi (n^2+m^2)}.$$

Вспоминая обозначения: $(-1)^{\frac{n-1}{2}} A_n = x_n$ и упрощая, можем переписать равенство (**) в таком виде:

$$\frac{x_\nu}{2\nu-1} + \frac{x_\mu}{2\mu-1} = 0. \qquad (***)$$

Отсюда следует, что при наличии хотя бы одного $x_\nu$, неравного нулю, все остальные $x_\mu$ тоже не равны нулю и притом они попарно разных знаков. Последнее невозможно, так как уже из каждых трех чисел всегда можно найти два числа одинаковых знаков. Кроме того из равенства (***) вытекает, что числа $x_\mu$ при $\mu \to \infty$ сами должны стремиться к бесконечности, если $x_\nu \neq 0$.

В силу сказанного, однородная система:

$$x_n = -\frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16(2n-1)^3}{\pi[(2n-1)^2+(2k-1)^2]} x_k$$

имеет только одно конечное решение: $x_n = 0$.

Положим для краткости письма:

$$\tau_{nk} = \frac{1}{\sigma_n} \frac{16(2n-1)^3}{\pi[(2n-1)^2+(2k-1)^2]^2}.$$

Система

$$x_n = -\sum_{k=1}^{\infty} \tau_{nk} x_k$$

имеет отрицательные коэффициенты. Одновременно с ней рассмотрим систему с положительными коэффициентами:

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_{nk} \xi_n.$$

Будем составлять для той и другой системы последовательные приближения $x_n^{(m)}$ и $\xi_n^{(m)}$, полагая: $x_n^{(1)} = \xi_n^{(1)} = 1$. Величины $\xi_n^{(m)}$ убывают при возрастании $m$. Кроме того непосредственно ясна справедливость равенств;

$$x_n^{(2\mu+1)} = \xi_n^{(2\mu+1)}; \quad x_n^{(2\mu)} = -\xi_n^{(2\mu)}.$$

Поэтому числа $|x_n^{(m)}|$ при возрастании $m$ убывают и стремятся к пределу, которым может быть только нуль. Поэтому и числа $\xi_n^{(m)}$ тоже стремятся к нулю при $m \to \infty$.

Таким образом система:

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_{nk} \xi_k$$

с положительными коэффициентами имеет лишь одно ограниченное решение.

Подобными же рассуждениями можно доказать, что вообще системы, получающиеся при изучении прогиба прямоугольной пластинки, имеют лишь одно ограниченное решение.

§ 13. В заключение остановимся немного на статье Б. М. Кояловича: «К теории бесконечных систем линейных уравнений». В ней он признает общепринятую точку зрения на бесконечные системы неудовлетворительной и предлагает взамен две новые. Согласно первой из них решением системы следует считать предел решения укороченной системы. По второй, решением системы:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k = b_n; \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

следует считать предел, к которому стремится решение конечной системы:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k = b_n + \beta_n^{(m)}; \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots m)$$

При этом числа $\beta_n$ должны стремиться к нулю при любом данном $n$ и при $m \to \infty$.

Приведенные определения следуют из сказанного на стр. 4 и 15 его статьи. Считая общепринятое определение решения системы безупречным, я нахожу новые определения не целесообразными. Первое из них слишком узко, а второе слишком широко по сравнению с обычным.

Для подтверждения сказанного рассмотрим три довольно характерных примера.

1. Найти бесконечный ряд:

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{x_n \xi^n}{n!},$$

сумма которого $f(\xi)$ удовлетворяет уравнению: $f'(\xi) = f(\xi)$. Задача приводит к системе:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots$$

Решения ее по общепринятой точке зрения и по второй новой такое: $x_n = c$. Первая из новых точек зрения дает: $x_n = 0$. Иначе говоря, в одном случае приходится полагать $f(\xi) = 0$, в другом находим $f(\xi) = Ce^{\xi}$.

2. Найти степенной ряд так, чтобы его сумма обращалась в нуль при любом целом положительном $\xi$. Задача приводит к системе:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} x_n n^k = 0. \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

В данном случае первая новая точка зрения приводит к ответу: нет таких рядов.

В данном случае $x_n^{(m)} \to \infty$. По первому из новых определений выходит, что задача невозможна. По второму из новых определений решением данной системы нужно считать любую данную совокупность чисел $x_1, x_2, x_3, \dots$ Это легко следует из того, что определитель, расположенный вне главной диагонали и упирающийся в нее нижним левым углом, отличен от нуля. Истина не совпадает ни с одним из этих выводов.

3. Решить систему:

$$\sum_{1}^{\infty} x_k k^{2n} = 0. \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Здесь точка зрения укороченных систем дает только один ответ: $x_n = 0$ в силу того, что определитель Вандермонда отличен от нуля. Согласно второй новой точке зрения всякую систему чисел: $x_1, x_2, x_3 \dots$ должно признать решением. Ясно что истина не совпадает со второй теорией. Она отличается и от первого решения. Это показывает решение, данное. И. П. Натансоном, по которому можно положить, напр.

$$x_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} \cos nx \, dx.$$

К этой системе приводит нахождение такого ряда:

$$a_0 + \sum_{1}^{\infty} x_n \cos n\xi,$$

сумма которого обращается в нуль вместе со своими производными при

$$\xi = 0.$$

## R. KUZMIN. SUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES LINÉAIRES A UNE INFINITÉ D'INCONNUES


### RÉSUMÉ

Dans ce travail je considère les systèmes:

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k + b_n. \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

Les coefficients $a$ et $b$ sont assujetis à remplir une de deux espèces des conditions:

I. Les conditions A:

$$a_{nk} \geqq 0; \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1 - \varphi_n; \quad \varphi_n > 0; \quad 0 < b < C\varphi_n.$$

II. Les conditions B:

$$\sum |a_{nk}| = 1 - \varphi_n; \quad \varphi_n > 0; \quad |b_n| < C\varphi_n.$$

Les propriétés principales de ces systèmes sont exprimées par les théorèmes suivants.

I Dans le cas où est remplie une des conditions mentionnées, les systèmes considérés ont au moins une solution; les nombres $x_1, x_2, x_3 \ldots$, sont bornés, c'est-à-dire appartiennent à un intervalle $(m, M)$ fini.

2. Dans le cas où sont remplies les conditions A, on peut regarder les nombres $x_1, x_2, x_3 \ldots$ comme les limites des grandeurs $x_1^{(m)}, x_2^{(m)} \ldots x_m^{(m)}$ satisfaisant au système réduit:

$$x_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k^{(m)} + b_n$$

Ces nombres: $x_n = \lim x_n^{(m)}$ donnent une solution du système considéré que nous appelerons solution principale.

3. Les valeurs principales des inconnues dans le système A avec les conditions: $0 < b_n < C\varphi_n$ sont contenues dans l'intervalle $(0, C)$.

4. Si les nombres $b_n$ obtiennent les accroissements positifs $\beta_n$, les valeurs principales $x_n$ ne peuvent pas diminuer.

5. Dans un cas général les systèmes considerés ont beaucoup de solutions. Un exemple assez simple donne le système:

$$x_n = \frac{e^{-(n+1)}}{n+1} + e^{-(n+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{k!} x_k \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Pour les valeurs principales dans ce système sont vérifiées les inégalitées:

$$0 < x_n < \frac{1}{2}$$

Un peu de calcul démontre que les inconnues peuvent avoir aussi les valeurs tout à fait différentes:

$$x_n = \frac{1}{n+1} - 1.$$

6. Si dans les conditions A on a aussi la condition complémentaire: $b_n = \varphi_n$, on peut prendre evidemment pour les valeurs des inconnues l'unité: $x_n = 1$. En général les valeurs principales peuvent être avec ces conditions tout différentes de l'unité. Un exemple est donné par le système:

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) x_{2n} + \frac{1}{4n} \sum_{n=1}^{\infty} x_k + \frac{1}{4n}; \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Ici on a pour les valeurs principales des inconnues les inégalités:

$$0 < x_1 < \frac{3}{4}; \quad 0 < x_2 < \frac{1}{2}; \quad 0 < x_3 < \frac{1}{3} \cdots$$

7. Si un système de le classe A: $x_n = \sum a_{nk} x_n + b_n$ a une solution unique en nombres finis et si les nombres $\alpha_{nk}$ et $\beta_n$ vérifient les inégalitées:

$$|\alpha_{nk}| \leqq a_{nk}, \; |\beta_n| \leqq b_n,$$

le système

$$\xi_n = \sum \alpha_{nk} \xi_k + \beta_n$$

a aussi une solution unique.

8. Les systèmes qui se rencontrent dans la théorie d'equilibre d'une plaque rectangulaire à bords encastrés ont une solution unique.

9. En résolvant les systêmes de la classe A par la méthode d'approximations successives à l'aide de la formule:

$$x_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k^{(m-1)} + b_n$$

nous obtenons les résultats suivants:

a) Si on a $b_n = 0$ et le système a une solution finie unique, les nombres $x_n^{(m)}$ tendent vers zéro avec $m \to \infty$ pour chaque $n$ fixé et cela pour une série de valeurs: $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots$ donnée arbitrairement dans un intervalle fini (a, b).

b) Si dans les suppositions $b = 0$, $x_n^{(1)} = 1$, on a $\lim x_n^{(m)} = 0$, les valeurs $x_n^{(m)}$ tendent au zero aussi avec les $x_n^{(1)}$ arbitraires dans un intervalle fini (a, b).

c) Pour des systèmes de classe A ou B:

$$x_n = \sum a_{nk} x_k + b_n$$

on peut obtenir une solution par la méthode d'approximations successives. Si l'on pose de plus: $x_n^{(1)} = b_n$, on obtient un développement de nombres $x_n$ en série qui converge absolument:

$$x_n = b_n + b_n^{(1)} + b_n^{(2)} + \ldots .$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

# О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДРОБНЫХ ЧАСТЕЙ СИСТЕМЫ ЦЕЛЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

И. А. СКОПИНА

(*Представлено академиком* И. М. Виноградовым)

Вопрос о возможности приблизиться дробной частью целого многочлена

$$f(x) = \alpha x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \ldots + \alpha_k,$$

где $x$ пробегает целые числа от 1 до $P$, к любой наперед заданной правильной дроби, был решен Hardy и Littlewood'ом в 1914 г. и Weyl'ем в 1916 г., но без оценки остаточного члена.

Акад. И. М. Виноградов, двумя методами: арифметическим в 1926 г. и аналитическим в 1927 г.,* дал решение этого вопроса с оценкой остаточного члена.

Наряду с этим вопросом возникает более общий вопрос о приближении системой целых многочленов

$$f_i(x) = \alpha^{(i)} x^{k_i} + \alpha_1^{(i)} x^{k_i - 1} + \ldots + \alpha_{k_i}^{(i)}; \quad i = 1, 2, \ldots n$$

где $n \geqslant 2$ есть число многочленов и $x$ пробегает целые числа от 1 до $P > 0$, к любым наперед заданным правильным дробям.

Пользуясь аналитическим методом И. М. Виноградова, можно сравнительно легко получить ответ и на этот вопрос, но при условии, что степень одного из многочленов системы превышает степени всех остальных.

Для последнего случая, методом, по существу не отличающимся от метода И. М. Виноградова, дано решение проф. Р. О. Кузьминым.**

Я рассматриваю более общий случай, когда два или более многочленов системы обладают наивысшей степенью.

В своей работе я использую аналитический метод И. М. Виноградова, внося в него некоторые изменения, сообразно с особенностями задачи.

* Изв. Акад. Наук СССР, за 1926 и 1927.

** Журн. Ленингр. Физ.-мат. общ., т. II, 1929.

Результаты, полученные мною, повидимому можно улучшить, но это сопряжено с весьма большими трудностями, которые преодолеть при современном состоянии методов навряд ли представляется возможным.

Для простоты изложения я ограничиваюсь рассмотрением системы двух многочленов одинаковой степени. Все сказанное относительно такой системы без труда обобщается и на системы большего числа многочленов.

*Обозначения.* Условимся под символами $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta', \theta'', \ldots$ понимать числа по модулю $< 1$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ как угодно малые положительные числа; если необходимо отметить, что $\varepsilon$ или $\theta$ зависит от некоторого параметра $t$, то будем писать $\varepsilon(t)$ или $\theta(t)$.

Символами $\{z\}$ и $(z)$ будем обозначать соответственно дробную часть и расстояние до ближайшего целого от числа $z$.

Равенство $0(A) = 0(B)$, где $A$ и $B$ величины, зависящие от бесконечно растущих параметров, будем понимать в том смысле, что $AB^{-1}$ остается ограниченным, тогда как $BA^{-1}$ может и не быть таковым.

Лемма I. Пусть $k$ постоянное целое $> 1$; $a$ целое $> 0$; $\tau_k(a)$ число решений в целых положительных числах уравнения

$$x_1 x_2 \ldots x_k = a$$

Тогда

$$\tau_k(a) = 0(a^{\varepsilon}).$$

Лемма II. Пусть $k$ целое $> 1$; $\lambda, \lambda_1, \ldots \lambda_k$ вещественные,

$$f(x) = \lambda x^k + \lambda_1 x^{k-1} + \ldots + \lambda_k,$$

$N$ целое, $P$ целое $> 0$,

$$S = \sum_{x=N+1}^{N+P} e^{2\pi i f(x)}.$$

Тогда

$$(1)\quad |S|^{2^{k-1}} < 4^{2^{k-1}} \left( P^{2^{k-1}-1} + P^{2^{k-1}-k} \sum_{h_1, \ldots h_{k-1}=1}^{P} \min\left(P, \frac{1}{(\lambda k! h_1 \ldots h_{k-1})}\right)\right),$$

где $\min\left(P, \frac{1}{0}\right)$ обозначает $P$.

Доказательство этих лемм можно найти в книге E. Landau «Vorlesungen über Zahlentheorie», Bd. I, Teil VI, Kap. 1, § 2.

Лемма III. Пусть $k, \lambda, \lambda_1, \ldots \lambda_k$, $f(x)$, $N$, $P$ и $S$ имеют значение, указанное в предыдущей лемме

$$\lambda = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{2q P^{k-\tau}}; \quad (a, q) = 1; \quad 1 \leqslant q \leqslant 2P^{k-\tau};$$

$\tau$ любое число, удовлетворяющее неравенствам $0 < \tau \leqslant 1$.

Тогда

$$S = 0\,[Pq^{\varepsilon}(q^{-1} + P^{-\tau})^{\sigma}]; \quad \sigma = 2^{-k+1}.$$

*Доказательство.* Применяя лемму II, мы можем сумму в правой части равенства (1) представить в форме

$$\sum_{h_1, \ldots h_k = 1}^{P} \min\left(P, \frac{1}{\left(\frac{ak!\, h_1 \ldots h_{k-1}}{q} + \frac{\varphi(h_1, \ldots h_{k-1})}{q}\right)}\right), \tag{2}$$

где

$$|\varphi(h_1, \ldots h_{k-1})| < k!.$$

Если $q < P$, то заменим в последней сумме $h_i (i = 1, 2, \ldots k-1)$ его наименьшим положительным вычетом $r_i$ по модулю $q$. После чего эту сумму можно будет разбить на не более чем

$$(Pq^{-1} + 1)^{k-1}$$

сумм вида

$$\sum_{r_1, \ldots, r_{k-1} = 0}^{R_1, \ldots, R_{k-1}} \min\left(P, \frac{1}{\left(\frac{ak!\, r_1 \ldots r_{k-1}}{q} + \frac{\psi(r_1, \ldots r_{k-1})}{q}\right)}\right) \tag{3}$$

где

$$R_1 \leqslant q-1; \ldots R_{k-1} \leqslant q-1; |\psi(r_1, \ldots r_{k-1})| < k!.$$

Если же $q > P$, то суммы (2) и (3) тождественны.

Выражение $k!\, r_1 \ldots r_{k-1}$ принимает лишь целые положительные значения $< k!\, R^{k-1}$, где $R = \min(q, P)$ и каждое из них, согласно лемме I, $0(R^{\varepsilon'}) = 0(q^{\varepsilon'})$ раз. Поэтому сумма (3) будет такого же порядка, что и выражение

$$q^{\varepsilon'} \sum_{z=0}^{k!\, R^{k-1}} \min\left(P, \frac{1}{\left(\frac{az}{q} + \frac{\rho(z)}{q}\right)}\right),$$

где

$$|\rho(z)| < k!.$$

Последняя сумма может быть разбита на не более чем

$$(k!\, R^{k-1} q^{-1} + 1) = 0(R^{k-1} q^{-1} + 1)$$

сумм вида

$$\sum_{u=0}^{q'} \min\left(P, \frac{1}{\left(\frac{u}{q} + \frac{\omega(u)}{q}\right)}\right),$$

где

$$q' \leqslant q-1; \quad \omega(u) < k!.$$

Известно, что последняя сумма будет величиною порядка

$$P + q^{1+\varepsilon_2}.$$

Собирая все сказанное, легко получим, что, как в случае $q < P$, так и в случае $q > P$ сумма (2) будет величиною порядка

$$q^{\varepsilon}(P^{k-1}q^{-1} + 1)(P + q).$$

После чего из неравенства (1) имеем

$$|S|^{2^{k-1}} = 0\,[P^{2^{k-1}-1} + P^{2^{k-1}-k}(P^{k-1}q^{-1} + 1)(P + q)q^{\varepsilon''}] =$$
$$= 0\,[P^{2^{k-1}}q^{\varepsilon''}(q^{-1} + P^{-\tau})],$$

что и доказывает лемму.

Лемма IV. Пусть $P$ целое положительное число, которое может неограниченно расти; $M$ и $N$ целые положительные; $\alpha$ и $\beta$ вещественные; $k$ и $\tau$ имеют значение такое же, что и в лемме III; $H = \min(uv)$ из всех целых положительных $u$ и $v$, удовлетворяющих неравенству

$$\{\alpha u \pm \beta v\} < P^{-k+\tau}.$$

Тогда число дробей

$$\{\alpha m \pm \beta n\},$$

где $m$ и $n$ независимо друг от друга пробегают значения

$$m = 1, 2, \ldots M$$
$$n = 1, 2, \ldots N,$$

меньших $2^{-1}P^{-k+\tau}$, будет величиною порядка

$$MNH^{-1} + 1.$$

*Доказательство.* 1°. Пусть $\xi_1$, $\xi_2$, $\eta_1$, $\eta_2$ вещественные числа, удовлетворяющие условиям:

$$\xi_1 < \xi_2; \quad \eta_1 < \eta_2; \quad (\xi_2 - \xi_1)(\eta_2 - \eta_1) = H;$$

$m$ и $n$ независимо друг от друга пробегают целые значения из промежутков

$$\xi_1 \leqslant m \leqslant \xi_2; \quad \eta_1 \leqslant n \leqslant \eta_2.$$

Тогда дробь

$$\{\alpha m \pm \beta n\}$$

может принять значение $< 2^{-1}P^{-k+\tau}$ не больше одного раза.

Действительно, допуская противное, т. е., что она принимает значение $< 2^{-1} P^{-k+\tau}$ два раза, при значениях $m$ и $n$, соответственно равных $m_1$, $n_1$ и $m_2$, $n_2$ имели бы (при $m_1 < m_2$)

$$\{\alpha(m_2 - m_1) \pm \beta(n_2 - n_1)\} < P^{-k+\tau},$$

но этого не может быть в силу условий леммы, ибо

$$(m_2 - m_1)|n_2 - n_1| \leqslant (\xi_2 - \xi_1)(\eta_2 - \eta_1) = H.$$

2°. Определим число $Q$, удовлетворяющее условиям

$$Q = M \quad \text{если} \quad M < H^{\frac{1}{2}}; \quad N \geqslant H^{1/2}$$

$$Q = HN^{-1} \quad \text{»} \quad M \geqslant H^{1/2}; \quad N < H^{1/2}$$

$$Q = H^{1/2} \quad \text{»} \quad M \geqslant H^{1/2}; \quad N \geqslant H^{1/2}$$

и разобьем все значения $m$ на группы по схеме

(A)
$$\begin{cases} 1 \leqslant m \leqslant Q \\ Q < m \leqslant 2Q \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \mu Q < m \leqslant M, \end{cases}$$

где

$$\mu = [MQ^{-1}],$$

а значения $n$ по схеме

(B)
$$\begin{cases} 1 \leqslant n \leqslant HQ^{-1} \\ HQ^{-1} < n \leqslant 2HQ^{-1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \nu HQ^{-1} < n \leqslant N, \end{cases}$$

где

$$\nu = [NQH^{-1}].$$

В случае же $M < H^{\frac{1}{2}}$; $N < H^{\frac{1}{2}}$, как для значений $m$, а так же и для значений $n$ будет по одной группе.

Возьмем какую-либо одну из групп (А) и приведем ей в соответствие одну из групп (В). В силу 1°, среди дробей

$$\{\alpha m \pm \beta n\}$$

с $m$ и $n$ из этих групп будет не больше одной, которая $< 2^{-1} P^{-k+\tau}$. Число же всех комбинаций попарно из групп (А) и (В) будет не больше

$$3MNH^{-1} + 2 = 0(MNH^{-1} + 1)$$

и следовательно лемма доказана.

Лемма V. Пусть $P$, $H$, $k$, $\tau$ и $\sigma$ имеют такие же значения, как и в предыдущих леммах; $\alpha$, $\alpha_1$, ... $\alpha_k$, $\beta$, $\beta_1$, ... $\beta_k$ вещественные.

Тогда обозначая через $\Omega$ сумму

$$\sum_{m=1}^{H} \sum_{n=1} \frac{1}{mn} \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i((\alpha m \pm \beta n)x^k + (\alpha_1 m \pm \beta_1 n)x^{k-1} + \ldots + (\alpha_k m \pm \beta_k n))}$$

будем иметь

$$\Omega = 0\left[P\left(H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_1} + P^{-\tau+\varepsilon_2}\right)^{\sigma}\right].$$

*Замечание.* Из определения $H$ следует, что если $\alpha$ и $\beta$ иррациональные и не связаны соотношением вида

$$\alpha u + \beta v = w$$

ни при каких рациональных $u$, $v$ и $w$, то при неограниченном возрастании $P$ будет также неограниченно расти и $H$.

*Доказательство.* При данных $m$ и $n$ число $\alpha m \pm \beta n$ представим в форме

$$(1) \qquad \alpha m \pm \beta n = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q 2P^{k-\tau}}; \quad (a, q) = 1; \quad 1 \leqslant q \leqslant 2P^{k-\tau},$$

что согласно теории непрерывных дробей сделать можно.

Тогда на основании леммы III имеем

$$(2) \qquad \Omega = 0\left[\sum_{m=1}^{H} \sum_{n=1}^{H} \frac{1}{mn} P q^{\varepsilon} (q^{-1} + P^{-\tau})^{\sigma}\right].$$

Оценим сначала сумму тех членов правой части последнего равенства, в которых $q \leqslant H^{\frac{1}{2}}$. Для этой цели разобьем значения $q$ на группы по схеме

$$(3)\qquad \begin{cases} q = 1 \\ q = 2,\ 3 \\ q = 4,\ 5,\ 6,\ 7 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ q = 2^{\rho},\ 2^{\rho}+1,\ \ldots,\ [\sqrt{H}], \end{cases}$$

где $2^{\rho}$ есть наибольшая степень двух, не превосходящая $\sqrt{H}$, и аналогично разобьем значения $m$ и $n$ на группы

$$(4)\qquad \begin{cases} m = 1 \\ m = 2,\ 3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ m = 2^{\omega},\ 2^{\omega}+1,\ \ldots,\ H \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} n = 1 \\ n = 2,\ 3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ n = 2^{\omega},\ 2^{\omega}+1,\ \ldots,\ H \end{cases}$$

где $2^{\omega}$ есть наибольшая степень двух, не превосходящая $H$.

Возьмем какую-либо одну из групп (3)

$$q = \lambda,\ \lambda+1,\ \ldots,\ \lambda+\lambda_1;\ \lambda_1 < \lambda$$

и сопоставим ей по одной из групп (4) и (5)

$$m = \mu,\ \mu+1,\ \ldots\ \mu+\mu_1;\ \mu_1 < \mu$$
$$n = \nu,\ \nu+1,\ \ldots\ \nu+\nu_1;\ \nu_1 < \nu.$$

Легко видеть, что каждый член суммы (2) с значениями $q$, $m$ и $n$ из взятых нами групп будет величиною порядка

$$\frac{1}{\mu\nu} P\lambda^{\varepsilon}(\lambda^{-1} + P^{-\tau})^{\sigma}.$$

Оценим теперь число этих членов. Для этого представим (1) в форме

$$\alpha mq \pm \beta nq = a + \theta 2^{-1} P^{-k+\tau}.$$

Откуда, полагая $mq = m'$; $nq = n'$ имеем

$$\alpha m' \pm \beta n' = a + \theta 2^{-1} P^{-k+\tau}. \tag{6}$$

Согласно лемме I, число пар $m$ и $q$, дающих определенное значение $m'$, будет $O(m'^{\varepsilon'}) = O(H^{\varepsilon'})$, а число пар $n$ и $q$, дающих определенное значение $n'$, будет $O(n'^{\varepsilon}) = O(H^{\varepsilon''})$.

Согласно же лемме IV, число пар $m'$ и $n'$, для которых имеет место равенство (6) и неравенства $m' < 4\lambda\mu$; $n' < 4\lambda\nu$, будет величиною

$$O(\mu\nu\lambda^2 H^{-1})$$

(ибо $\mu\nu\lambda^2 > H$ согласно определению числа $H$).

Следовательно, число членов с $q$, $m$ и $n$, попавшими в вышеуказанную комбинацию групп, будет величиною

$$O(\mu\nu\lambda^2 \cdot H^{-1+\varepsilon'''}),$$

а сумма этих членов будет

$$O\left(\frac{\mu\nu\lambda^2 H^{-1+\varepsilon'''}}{\mu\nu} P\lambda^{\varepsilon}(\lambda^{-1} + P^{-\tau})^{\sigma}\right) =$$

$$= O\left[ PH^{\varepsilon_3}\left( \frac{\lambda^{\frac{2}{\sigma}-1}}{(\sqrt{H})^{\frac{2}{\sigma}-1+1}} + \frac{\lambda^{\frac{2}{\sigma}}}{(\sqrt{H})^{\frac{2}{\sigma}}} P^{-\tau} \right)^{\sigma} \right] =$$

$$= O\left( PH^{\varepsilon_3}\left( H^{-\frac{1}{2}} + P^{-\tau} \right)^{\sigma} \right).$$

Всех групп (3), (4) и (5) будет $O(\lg H) = O(H^{\varepsilon_4})$ и следовательно таков же порядок будет числа комбинации из них по три.

Из всего сказанного вытекает, что сумма всех членов (2) с $q \leqslant H^{\frac{1}{2}}$ будет порядка, указанного в формулировке леммы.

Оценим теперь сумму оставшихся членов во (2). Во всех этих членах

$$q > H^{1/2}$$

и следовательно каждый из них будет величиною порядка

$$\frac{1}{mn} P\left(H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_5} + P^{-\tau} q^{\varepsilon_5}\right)^{\sigma}.$$

Но так как число всех таких членов $O(\lg H)$, то легко видеть, что сумма всех этих членов будет величина порядка, указанного в формулировке леммы, и, следовательно, лемма доказана.

**Теорема I.** Пусть

$$f_1(x) = \alpha x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \ldots + \alpha_k$$
$$f_2(x) = \beta x^k + \beta_1 x^{k-1} + \ldots + \beta_k$$

многочлены степени $k > 1$ с вещественными коэффициентами, причем старшие коэффициенты $\alpha$ и $\beta$ иррациональные и не связаны соотношением вида

$$\alpha u \pm \beta v = w$$

ни при каких рациональных $u$, $v$ и $w$.*

Пусть далее $P$ целое положительное число, которое может неограниченно расти; $\tau$ любое, удовлетворяющее условиям $0 < \tau \leqslant 1$; $H = \min(uv)$ из всех пар целых положительных $u$ и $v$, удовлетворяющих неравенству

$$\{\alpha u \pm \beta v\} < P^{-k+\tau};$$

$h_1 = \min u$ из всех целых $> 0$ $u$, удовлетворяющих неравенству

$$\{\alpha u\} < P^{-k+\tau};$$

$h_2 = \min v$ из всех целых $> 0$ $v$, удовлетворяющих неравенству

$$\{\beta v\} < P^{-k+\tau}.$$

Тогда при любых $\mu$ и $\nu$, лежащих между 0 и 1, число $T_{\mu\nu}$ пар дробей

$$\{f_1(x)\} \quad \text{и} \quad \{f_2(x)\},$$

* Если это соотношение имеет место, то теорема справедлива с более хорошим остаточным членом, что непосредственно следует из работ И. М. Виноградова.

одновременно удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leqslant \{f_1(x)\} < \mu$$
$$0 \leqslant \{f_2(x)\} < \nu,$$

когда $x$ пробегает значения $1, 2, \ldots P$, может быть выражено формулой

$$T_{\mu\nu} = \mu\nu P + O\left(P\left(P^{-\tau+\varepsilon_1} + H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_2} + h_1^{-1+\varepsilon_3} h_2^{-1+\varepsilon_4}\right)^{\sigma}\right),$$

где $\sigma = 2^{-k+1}$.

*Доказательство.* Рассмотрим периодическую функцию $\varphi(x)$ с периодом $= 1$, определяемую равенствами

| | | |
|---|---|---|
| $\varphi(x) = \frac{1}{\Delta}(x + \Delta)$ | в промежутке | $(-\Delta, 0)$ |
| $\varphi(x) = 1$ | « « | $(0, \gamma)$ |
| $\varphi(x) = 1 - \frac{1}{\Delta}(x - \gamma)$ | « « | $(\gamma, \gamma + \Delta)$ |
| $\varphi(x) = 0$ | « « | $(\gamma + \Delta, 1 - \Delta)$ |

где $\Delta$ и $\gamma$ любые вещественные числа, удовлетворяющие условиям

$$0 < \Delta \leqslant \frac{1}{3}; \quad 0 < \gamma < 1 - 2\Delta.$$

Эта функция может быть разложена в тригонометрический ряд Фурье по формуле

$$\varphi(x) = \gamma + \Delta + \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m \cos 2\pi mx + B_m \sin 2\pi mx\right), \tag{1}$$

причем коэффициенты $A_m$ и $B_m$ при любом $m$ не превосходят наибольшего из чисел

$$\frac{1}{m}, \quad \frac{1}{\Delta m^2}.$$

Оставляя пока $\Delta$ произвольным, заменим $x$ в формуле (1) сначала на $f_1(x)$, а потом на $f_2(x)$ и соответственно $\gamma$ на $\mu$ и на $\nu$, будем иметь

$$\varphi_1(f_1(x)) = \mu + \Delta + \sum_{m=1}^{\infty}\left(A'_m \cos 2\pi m f_1(x) + B'_m \sin 2\pi m f_1(x)\right);$$

$$\varphi_2(f_2(x)) = \nu + \Delta + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A''_n \cos 2\pi n f_2(x) + B''_n \sin 2\pi n f_2(x)\right).$$

Перемножая левые и правые части последних равенств и суммируя полученные результаты по $x$ в пределах от 1 до $P$, имеем

$$\sum_{x=1}^{x=P} \varphi_1(f_1(x))\,\varphi_2(f_2(x)) = \mu\nu P + (\Delta + \mu + \nu)\,\Delta P +$$

$$+ (\mu + \Delta) \sum_{n=1}^{\infty} (A_n'' E_2 + B_n'' F_2) + (\nu + \Delta) \sum_{m=1}^{\infty}{}' (A_m' E_1 + B_m' F_1) + \tag{2}$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n'' A_m' E + A_m' B_n'' F + A_n'' B_m' K + B_m' B_n'' L),$$

где $E_1$ и $E_2$ суть соответственно вещественные части, а $F_1$ и $F_2$ коэффициенты при $i$ в суммах

$$\sum_{x=1}^{x=P} e^{2\pi i m f_1(x)}; \quad \sum_{x=1}^{x=P} e^{2\pi i n f_2(x)};$$

$E$, $F$, $K$ и $L$ суть соответственно суммы

$$\sum_{x=1}^{x=P} \cos 2\pi m f_1(x) \cos 2\pi n f_2(x); \quad \sum_{x=1}^{x=P} \cos 2\pi m f_1(x) \sin 2\pi n f_2(x);$$

$$\sum_{x=1}^{x=P} \sin 2\pi m f_1(x) \cos 2\pi n f_2(x); \quad \sum_{x=1}^{x=P} \sin 2\pi m f_1(x) \sin 2\pi n f_2(x), \tag{3}$$

причем легко видеть, что порядок последних сумм будет такой же, как и суммы

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i (m f_1(x) \pm n f_2(x))}.$$

Чтобы оценить последнюю сумму в правой части равенства (2), выделим из нее все члены, в которых $m$ и $n$ не превосходят $H$ и возьмем для $A_m'$, $B_m'$ оценку $\frac{1}{m}$, а для $A_n''$, $B_n''$ оценку $\frac{1}{n}$. Тогда, согласно леммы V, сумма этих членов будет величиною

$$O\left(P\left(H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_1} + P^{-\tau+\varepsilon_2}\right)^{\sigma}\right).$$

В оставшиеся части рассматриваемой суммы, возьмем для коэффициентов $A_m'$, $B_m'$ оценку $\frac{1}{m}$ при $m \leqslant H$ и $\frac{1}{\Delta m^2}$ при $m > H$ и точно так же

для $A_n''$, $B_n''$ оценку $\frac{1}{n}$ при $n \leqslant H$ и $\frac{1}{\Delta n^2}$ при $n > H$. Для сумм (3) возьмем очевидную оценку $P$.

Тогда схематически записывая эту часть суммы в форме

$$\sum_{m=1}^{m=H} \sum_{n=H+1}^{\infty} + \sum_{n=1}^{H} \sum_{m=H+1}^{\infty} + \sum_{m=H+1}^{\infty} \sum_{n=H+1}^{\infty},$$

легко получим, что она будет величиною

$$O\left(P\frac{1}{H\Delta}\lg H + P\frac{1}{H\Delta}\lg H + P\frac{1}{H^2\Delta^2}\right).$$

Чтобы оценить предпоследнюю сумму в правой части равенства (2), схематически напишем ее в форме

$$\sum_{m=1}^{h_1} + \sum_{m=h_1+1}^{\infty}.$$

Повторяя рассуждения, какими были доказаны леммы IV и V убедимся, что первая сумма в последнем выражении будет величиною

$$O\left(P\left(h_1^{-1+\varepsilon} + P^{-\tau+\varepsilon}\right)^{\sigma}\right).$$

Последняя же сумма в выражении (4) будет величиною

$$O\left(P\frac{1}{h_1\Delta}\right)$$

Точно также получим, что первая сумма в правой части равенства (2) будет величиною

$$O\left(P\left(h_2^{-1+\varepsilon} + P^{-\tau+\varepsilon}\right)^{\sigma} + P\frac{1}{h_2\Delta}\right).$$

Положим

$$\Delta = \max\left(P^{-\sigma}, \sqrt{H}^{-\sigma}, h_1^{-\sigma}, h_2^{-\sigma}\right),$$

тогда собирая все доказанное, получаем

$$\sum_{x=1}^{x=P} \varphi_1\left(f_1(x)\right)\varphi_2\left(f_1(x)\right) =$$

$$= \mu\nu P + O\left(P\left(P^{-\tau+\varepsilon_1} + H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_2} + h_1^{-1+\varepsilon_3} + h_2^{-1+\varepsilon_4}\right)^{\sigma}\right).$$

Из последнего равенства следует доказываемая теорема.

**Теорема II.** Сохраняя условия теоремы I, можно целыми $x$, $y$ и $z$ удовлетворить системе неравенств

$$|f_1(x)-y|<c_1\left(P^{-\tau+\varepsilon_1}+H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_2}+h_1^{-1+\varepsilon_3}+h_2^{-1+\varepsilon_4}\right)^{\sigma}$$

$$|f_2(x)-z|<c_2\left(P^{-\tau+\varepsilon_1}+H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_2}+h_1^{-1+\varepsilon_3}+h_2^{-1+\varepsilon_4}\right)^{\sigma}$$

$$0<x\leqslant P,$$

где $c_1$ и $c_2$ не зависят от $P$, $H$, $h_1$, $h_2$.

Результаты, полученные И. М. Виноградовым и Р. О. Кузьминым, отсюда следуют как частные случаи.

## J. SKOPIN. ÜBER DIE VERTEILUNG DER BRUCHTEILE FÜR EIN SYSTEM GANZER POLYNOME

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Abhandlung werden folgende Sätze bewiesen:

**Satz I.** Es seien

$$f_1(x)=\alpha x^k+\alpha_1 x^{k-1}+\ldots+\alpha_k$$

$$f_2(x)=\beta x^k+\beta_1 x^{k-1}+\ldots+\beta_k$$

Polynome $k$-ten Grades ($k>1$) mit reellen Koeffizienten, wobei die Koefffzienten $\alpha$ und $\beta$ bei höchstem Grade von $x$ irrational sind und der Beziehung

$$\alpha u\pm\beta v=w$$

bei irgend welchen rationalen $u$, $v$, $w$ nicht genügen.

Es sei ferner, $P$ eine positive ganze Zahl, die willkürlich Zunehmen darf $\tau$ eine beliebige Zahl, die der Bedingung $0<\tau\leqslant 1$ genügt; $H=\min(uv)$ von sämmtliche Paare ganzer positiver, der Ungleichheit

$$\{\alpha u\pm\beta v\}<P^{-k+\tau}$$

genügender Zahlen $u$, $v$;

$h_1=\min u$ von sämmtliche ganzer positiver der Ungleichheit

$$\{\alpha u\}<P^{-k+\tau}$$

genügende $u$;

$h_2=\min v$ von sämmtliche ganzer positiver der Ungleichheit

$$\{\beta v\}<P^{-k+\tau}$$

genügende $v$.

Dann lässt sich die Anzahl $T_{\mu\nu}$ der Paare der Bruchteile $\{f_1(x)\}$ und $\{f_2(x)\}$, die gleichzeitig der Ungleichheiten

$$0 < \{f_1(x)\} < \mu; \quad 0 < \{f_2(x)\} < \nu$$

genügen, bei beliebigen zwischen 0 und 1 liegenden $\mu$ und $\nu$, wenn $x$ die Werte

$$1, 2, \ldots P$$

durchläuft, durch folgende Formel aussprechen:

$$T_{\mu\nu} = \mu\nu P + O\left(P\left(P^{-\tau+\varepsilon_1} + H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_2} + h_1^{-1+\varepsilon_3} + h_2^{-1+\varepsilon_4}\right)^{\sigma}\right),$$

wo $\sigma = 2^{-k+1}$.

**Satz II.** Unter der Bedingungen des I. Satzes, werden stets ganze Zahlen $x$, $y$, $z$ gefunden, die gleichzeitig den Ungleichheiten

$$|f_1(x) - y| < c_1\left(P^{-\tau+\varepsilon_1} + H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_2} + h_1^{-1+\varepsilon_3} + h_2^{-1+\varepsilon_4}\right)^{\sigma}$$

$$|f_2(x) - z| < c_2\left(P^{-\tau+\varepsilon_1} + H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_2} + h_1^{-1+\varepsilon_3} + h_2^{-1+\varepsilon_4}\right)^{\sigma}$$

$$0 < x \leqslant P$$

genügen, wo $c_1$, $c_2$ positive von der Zahlen $P$, $H$, $h_1$, $h_2$ unabhängige Zahlen bedeuten, alle andere Grössen aber dieselbe Bedeutung, wie im Satze I haben.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

# ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ТЕОРИИ КРЫЛА В СЖИМАЕМОМ ГАЗЕ

М. КЕЛДЫША и Ф. ФРАНКЛЯ

(*Представлено академиком* С. А. Чаплыгиным)

## 1. Постановка задачи

При скоростях, приближающихся к скорости звука, начинает значительно сказываться влияние сжимаемости воздуха на подъемную силу крыла. При рассмотрении потоков сжимаемого газа надо существенно различать два случая, случай, когда скорости потока остаются всюду меньше скорости звука и случай, когда встречаются сверхзвуковые скорости. Настоящая работа посвещена рассмотрению первого случая. Эта задача была впервые решена приближенным способом Прандтлем и Глауэртом.[1]) Они пришли к тому результату, что коэффициент подъемной силы пропорционален выражению

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где $\beta = \frac{\overline{w}}{a}$ — равна отношению скорости потока к скорости звука вдали от крыла. Эта формула пригодна для тонких крыльев при малых углах атаки и дает хорошее согласие с опытом, однако вывод ее отличается недостаточной математической строгостью, и поэтому границы ее применимости неизвестны. В своей, еще не опубликованной работе, П. А. Вальтер[2]) ставит себе задачу найти более точное приближение. Однако и здесь оценка ошибки отсутствует.

Ограничиваясь рассмотрением плоско-параллельного потока, мы даем строгую теорию явления, для достаточно малых значений числа $\beta$. В каче-

1) Handbuch der Experimentalphysik, Bd. IV, T. 1, S. 410, — R. & M., 1135.

2) Работа была доложена на I-й Всесоюзной Конференции по механике, в мае 1932 г. (*Примеч. ред.:* ко времени печатания этой статьи — опубликована в № 1 ИМЕН, 1934, стр. 75).

стве приложения полученных результатов, дается строгий вывод формулы Жуковского для подъемной силы в случае сжимаемого газа.

Эта теорема была выведена Глауэртом[1]) и акад. С. А. Чаплыгиным[2]), предполагая, что составляющие скоростей потока в окрестности бесконечно удаленной точки разлагаются в ряд Лорана по расстоянию от начала координат. Однако, возможность такого разложения до сих пор не установлена.

Уравнение для потенциала скоростей сжимаемого газа имеет вид:

$$\left[1-\frac{u^2}{a^{*2}}-\frac{k-1}{k+1}\frac{v^2}{a^{*2}}\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{4uv}{(k+1)\,a^{*2}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}+$$
$$+\left[1-\frac{v^2}{a^{*2}}-\frac{k-1}{k+1}\frac{u^2}{a^{*2}}\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0$$

где $\Phi$ — потенциал скорости и $u=\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $v=\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ составляющие скорости по осям $x$ и $y$, $a^*$ — критическая скорость звука, $k=\frac{c_p}{c_v}$ — отношение теплоемкостей ($k=1.4$ для двухатомных газов).

Задача нахождения потока, обтекающего крыло, сводится к решению этого уравнения, при следующих условиях:

1) На контуре крыла $\frac{\partial\Phi}{\partial n}=0$

2) $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} u=\bar{w}$, $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} v=0$

3) $u$ и $v$ всюду конечны.

Написанное уравнение при скоростях, меньших скорости звука, имеет эллиптический тип.

Мы разберем несколько более общую задачу. Именно: задачу Неймана для уравнения вида

$$\Delta u=\mu F(x,\,y,\,u,\,p,\,q,\,r,\,s,\,t)$$

правая часть которого $F$, удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, которые мы сформулируем ниже, а $\mu$ — параметр. Для решения этой задачи нам потребуются некоторые вспомогательные предложения из теории потенциала, которые мы докажем в первых параграфах.

Надо подчеркнуть, что доказательство сходимости решения проведено лишь для достаточно малых значений числа $\mu$, причем остается неизвестным до каких пределов для $\mu$ можно продолжить это решение.

[1]) R. & M., 1135.

[2]) Доказательство С. А. Чаплыгина не было опубликовано.

Укажем здесь на работу Taylor'a, в которой примененный здесь метод последовательных приближений был проведен для уравнения сжимаемого газа при помощи электрического аппарата.[1]) На основании полученных результатов можно предполагать, что последовательные приближения сходятся, если скорость нигде не превышает скорости звука. С другой стороны, одна экспериментальная работа Busemann'a показывает, что при слишком больших скоростях, но еще не превышающих в бесконечности скорости звука, не может существовать непрерывного потенциального потока. Скорость около тела переходит в сверхзвуковую, а затем позади тела скачкообразно возвращается в дозвуковую область.[2]) Наконец в одной приближенной математической работе, основанной на вариационных методах G. Braun[3]) приходит к тому предположению, что существуют еще такие режимы, когда в некоторых точках около тела встречаются сверхзвуковые скорости, но поток сохраняет непрерывный и потенциальный характер. Есть основание предполагать, что при этом процесс последовательных приближений сходится.

Для решения этого вопроса надо исследовать аналитическое продолжение нашего решения для растущих $\mu$.

В нашей работе мы развиваем методы, примененные L. Lichtenstein'ом для решения внутренней задачи Dirichlet для нелинейных эллиптических уравнений.[4])

## 2. Функции Грина

Нам нужно прежде всего уточнить некоторые, требующиеся нам, свойства функции Грина.

Пусть $(C)$ замкнутая аналитическая кривая, не имеющая особых точек, окружающая начало координат, и $(D)$ внешняя часть плоскости, ограниченная этой кривой.

Мы выберем функцию Грина, определяемую следующими условиями: пусть $P(x, y)$ и $P'(\xi, \eta)$ две точки области $(D)$, тогда

$$G(x, y; \xi, \eta) = \lg \frac{r}{\rho} + g(x, y; \xi, \eta), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2,1)$$

где

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

[1]) Verh. des III. Intern. Kongresses für techn. Mechanik, 1. Teil, 1932, S. 263.

[2]) Verh. des III. Intern. Kongresses für techn. Mechanik, 1. Teil, 1932, S. 282.

[3]) Ann. der Phys., 1932, Bd. 15, H. 6.

[4]) Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen.

а $g(x, y; \xi, \eta)$ регулярная в области $(D)$ гармоническая функция от переменных $\xi, \eta$, обращающаяся в нуль при $\rho = \infty$ и на контуре $(C)$ удовлетворяющая условию

тогда

$$\left.\begin{aligned} \frac{dg}{d\nu} &= -\frac{d\ln r^{1)}}{d\nu} \\ \frac{dG}{d\nu} &= -\frac{d\ln\rho}{d\nu} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2, 2)$$

Заметим, что последнее выражение не зависит от точки $P(x, y)$. Нам потребуются следующие свойства функции Грина.

**a) Псевдо-симметрия функции Грина**

Применим формулу Грина к функциям

$$G(P_1, P') = G(P_1, P') + \ln\rho$$
$$G(P_2, P') = G(P_2, P') + \ln\rho$$

по области, ограниченной кривой $(C)$, кругом $\Gamma$ с центром в начале и радиусом $R$ и кругами $\gamma_1$ и $\gamma_2$ с центрами в точках $P_1$ и $P_2$. Удаляя $\Gamma$ в бесконечность и стягивая $\gamma_1$ и $\gamma_2$ к радиусу нуль, получаем

$$G(P, P') + \lg\rho = G(P', P) + \lg R \quad \ldots\ldots (2, 3)$$
$$R = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

**b) Интерпретация функции Грина**

Из (2, 3) следует, что при фиксированном $P'$, $G(P, P')$ есть гармоническая функция точки P, причем

$$\frac{dG(P, P')}{dn} = \frac{dG(P', P)}{dn} + \frac{d\ln R}{dn} = 0 \quad \ldots\ldots (2, 4)$$

на границе области. Значит функция Грина, рассматриваемая как функция точки $P(x, y)$, есть потенциал скоростей потока несжимаемой жидкости, с источником в точке $P(\xi, \eta)$ мощности $2\pi$, и обтекающей контур $(C)$.

**c) Поведение функции Грина в бесконечности**

По определению $g(P, P')$ есть регулярная в бесконечности функция $P'$, при фиксированном P. Из (2, 3) следует симметрия этой функции

$$g(P, P') = g(P', P).$$

1) Производную по нормали функции $\xi, \eta$ мы обозначаем $\frac{d}{d\nu}$, а функции $x, y$, $\frac{d}{dn}$.

Следовательно при фиксированном $P'$, $g(P, P')$ есть регулярная функция $P$, $g(P, P')$ есть действительная часть функции двух комплексных переменных $P$, $P'$ регулярной в бесконечности по обеим переменным. Это приводит к следующим неравенствам:

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| &< \frac{A}{R^2\rho} \\ \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\right|, \left|\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right| &< \frac{A}{R^3\rho} \\ \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(P_1, P') - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(P_2, P')\right|, \ldots\ldots &< \frac{Ad}{R^4\rho}, (d = \overline{P_1 P_2}) \end{aligned}\right\} \quad .(2,6)$$

**d) Поведение функции Грина вблизи границы области**

Докажем теперь, что

$$G(P, P') = \lg \frac{rr^*}{\rho^2} + \gamma(P, P') \ldots\ldots\ldots (2,7)$$

где

$$r = \overline{PP'}, \qquad r^* = P^* P',$$

$P^*$ инверсия точки $P$ относительно аналитической кривой $(C)$, а $\gamma(P, P')$ регулярная функция точек $P$, $P'$, если точка $P$ находится в некоторой достаточно малой окрестности кривой[1]) $(C)$, а $P'$ не выходит из области $(D)$.

Для того, чтобы это усмотреть, заметим, что определенная нами функция Грина, для случая внешности круга имеет вид:

$$\overline{G}(\overline{P}, \overline{P}') = \lg \frac{\bar{r}\bar{r}^*}{\bar{\rho}^2}$$

где $\rho = \overline{OP'}$, $\bar{r} = \overline{PP'}$, $\bar{r}^* = \overline{P}^* \overline{P}'$, а $\overline{P}^*$ инверсия $\overline{P}$ относительно круга.

Отобразим конформно внешность круга на область $(D)$ так, чтобы бесконечно удаленные точки соответствовали друг другу. Тогда $\overline{G}$ перейдет в $\overline{G}'$, причем

$$\overline{G}'(P, P') = G(P, P') + \Psi(P')$$

где $\Psi(P')$ регулярная гармоническая функция в области $(D)$, обращающаяся в бесконечности в нуль. В самом деле,

$$\overline{G}'(P, P') - G(P, P'),$$

[1]) Под окрестностью контура $(C)$ мы будем подразумевать область, заключенную между кривой $(C)$ и какой-нибудь охватывающей ее кривой $(C')$. Окрестность кривой $(C)$ мала, если наибольшее из расстояний от точек линии $(C')$ до линии $(C)$ мало.

рассматриваемая как функция P′, имеет на контуре нормальную производную, значения которой не зависят от положения P, кроме того эта разность регулярна во всей области $D$ и обращается в нуль при $P' = \infty$.

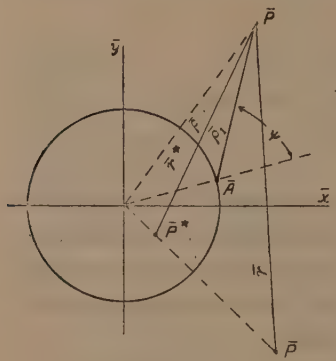
С другой стороны

$$\lg \bar{r}\,\bar{r}^* = \lg \frac{\bar{r}\,\bar{r}^*}{r\,r^*} + \lg r r^*.$$

Первое слагаемое есть регулярная функция P и P′, если P находится в достаточно малой окрестности контура $(C)$.

### е) Неоднозначная функция Грина

Пусть теперь область $(D)$ ограничена аналитической кривой с одной угловой точкой $A$. Нам придется пользоваться неоднозначной функцией Грина, которая определяется следующим образом: функция Грина $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$, рассматриваемая как функция переменных $x$, $y$, есть потенциал скоростей течения несжимаемой жидкости, имеющей источник в точке $\xi$, $\eta$, с мощностью равной $2\pi$, обтекающей контур $(C)$ со сходом струй в угловой точке $A$, и имеющей в бесконечности скорость равную нулю.



Фиг. 1.

Кроме того, мы потребуем, чтобы $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ была бы гармонической функцией точки $\xi$, $\eta$, обращающейся в нуль в бесконечности. Эта функция $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ будет, вообще говоря, неоднозначной, ввиду того, что поток будет иметь некоторую циркуляцию.

В случае, когда кривая $(C)$ есть круг с радиусом единица, мы построим такой поток со сходом струй в заданной точке $\bar{A}$. Пусть $\bar{P}$ точка с координатами $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{P}^*$ ее инверсия. Помещая источник в точке $\bar{P}(\xi, \eta)$ и, пользуясь обозначениями фиг. 1, имеем:

$$\Gamma(\bar{x}, \bar{y}; \bar{\xi}, \bar{\eta}) = \lg \frac{\bar{r}\,\bar{r}^*}{\bar{\rho}^2} - \frac{\sin\psi}{\bar{\rho}_1} \operatorname{arctg} \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \quad \ldots\ldots \quad (2, 9)$$

Совершим теперь конформное отображение внешности круга на область $(D)$ так, чтобы бесконечно удаленные точки соответствовали друг другу, а угловая точка $A$ соответствовала бы точке $\bar{A}$. При этом преобразовании функция $\Gamma(\bar{x}, \bar{y}; \bar{\xi}, \bar{\eta})$ перейдет в неоднозначную функцию Грина.

Укажем, что всякая другая неоднозначная функция Грина, удовлетворяющая поставленным выше условиям, может отличаться от найденной только на гармоническую функцию переменных $\xi$, $\eta$, регулярную во всей области $(D)$ и обращающуюся в нуль в бесконечности.

Если мы рассечем область $(D)$ купюрой, идущей от какой-нибудь точки контура $(C)$ в бесконечность, то в полученной области $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ распадается на однозначные ветви, и одну из них мы выберем за главное значение.

### 3. Вспомогательные предложения из теории потенциала

Рассмотрим в области $(D)$ уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = h(x, y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3, 1)$$

правая часть которого удовлетворяет следующим условиям

$$\left.\begin{aligned} &|h(x, y)| < KR^{\nu-2} \\ &R_2 \geqslant R_1 = R,\ d < R \\ &|h(x_2, y_2) - h(x_1, y_1)| < KR^{\nu-2}\left(\frac{d}{R}\right)^{\lambda} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3, 2)$$

и при

где

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$
$$0 < \lambda < 1, \quad 0 < \nu < 1,$$

а $K$ — постоянная величина.

Мы будем сначала предполагать, что аналитическая кривая не имеет особых точек.

*Теорема I.* Всякое решение уравнения (3, 1), удовлетворяющее на контуре области условию:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3, 3)$$

и внутри области $(D)$ неравенствам

$$\left.\begin{aligned} &|\varphi(x, y)| < \angle R^{\nu} \\ &\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right| < \angle R^{\nu-1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3, 4)$$

дается формулой

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi}\iint_D G(x, y; \xi, \eta)\, h(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \text{const} \quad \ldots \quad (3, 5)$$

Константа, входящая в формулу (3, 5) не существенна, так как имеющиеся уравнения определяют решение только в точности до произвольной постоянной.

Для доказательства, как это делается обычно, применяем формулу Грина в области $(D')$, ограниченной кривой $(C)$, кругом $\Gamma$ радиуса $R$ с центром в начале координат и кругом $\gamma$ вокруг точки P. Тогда

$$\iint_D (\varphi \Delta G - G \Delta \varphi)\, d\xi\, d\eta = \int_C \left( G \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial G}{\partial \nu} \right) ds + \int_\Gamma + \int_\gamma$$

Если круг $\Gamma$ уходит в бесконечность, то, так как $\varphi$ удовлетворяет условиям (3, 4) и

$$|G| < \frac{M}{R}, \quad \left| \frac{\partial G}{\partial R} \right| < \frac{M}{R^2}$$

$$\left| \int_\Gamma \right| \leqslant 2M \int_\Gamma R^{\nu-2}\, ds\, 4\pi MLR^{\nu-1} \to 0$$

Кроме того, если $\gamma$ стягивается к P, то

$$\int_\gamma \to -2\pi\varphi(x, y)$$

и

$$\int_{(C)} \left( G \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial G}{\partial \nu} \right) ds = -\int_{(C)} \varphi \frac{\partial G}{\partial \nu} ds - \int_{(C)} \varphi \frac{\partial \ln \rho}{\partial \nu} ds = \text{const}$$

$$\iint_{(D')} (G\Delta\varphi - \varphi\Delta G)\, d\xi d\eta = \iint_{(D')} G(x, y; \xi, \eta)\, h(\xi, \eta)\, d\xi d\eta$$

следовательно в пределе получаем формулу (3, 5). Заметим, что полученный двойной интеграл сходится, так как подинтегральное выражение в окрестности бесконечно удаленной точки удовлетворяет условию

$$|Gh| < \frac{MK}{R^{3-\nu}}, \quad (0 < \nu < 1)$$

*Теорема II*[1]). Функция $\varphi(x, y)$, определяемая равенством (3, 5), непрерывная вместе со своими производными до второго порядка включительно, удовлетворяет дифференциальному урав-

[1]) Подобные условия, но без показателя, можно найти в работе Lichtenstein'a. См. Math. Ztschr., Bd. 27, S. 607, и Grundlagen der Hydromechanik, S. 441. Однако, без показателя $\nu$, мы не могли обойтись. При $\nu = 0$ теорема не верна.

нению (3, 1), краевому условию (3, 3) и системе следующих неравенств.

$$\left.\begin{array}{c} |\varphi| < AKR^{\nu} \\ \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right| < AKR^{\nu-1} \\ d < R \\ \left|\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right] - \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]\right|, \ldots\ldots < AKR^{\nu-2}\left(\frac{d}{R}\right)^{\lambda} \end{array}\right\} \quad (3,6)$$

при

где $A$ константа, зависящая только от формы области $(D)$, и в последних неравенствах $R$ наименьшее из чисел $R_1$, $R_2$, а $d = \overline{P_1 P_2}$.

Во-первых укажем, что интеграл (3, 5) сходится, и законно дифференцирование под знаком интеграла. Как обычно

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(D)} \frac{\partial G}{\partial x} h\, d\xi\, d\eta, \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(D)} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} h\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{2} h(x, y), \end{array}\right\} \ldots\ldots (3,7)$$

Отсюда непосредственно следует, что $\varphi$ удовлетворяет уравнению (3, 1).

Начнем с доказательства последних неравенств (3, 6). Нам придется рассмотреть три случая. Пусть, во-первых точки $P_1$, $P_2$ находятся в достаточно малой окрестности кривой $(C)$, в которой выполняется формула (2, 8).

Рассмотрим производную $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$. Так как $h(x, y)$ удовлетворяет неравенству (3, 2), нам надо доказать, что интеграл

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} h\, d\xi\, d\eta = \iint\limits_{(D)} \frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2} h\, d\xi\, d\eta + \iint\limits_{(D)} \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} h\, d\xi\, d\eta + \iint\limits_{(D)} \frac{\partial^2 \ln r^*}{\partial x^2} h\, d\xi\, d\eta$$

удовлетворяет последнему из равенства (3, 6).

Прежде всего покажем, что первый интеграл удовлетворяет этому условию. Когда P находится вблизи контура и P′ пробегает всю область $(D)$, $\gamma(P, P')$ регулярна и обращается в нуль, когда точка P удаляется в бесконечность, поэтому

$$\left|\frac{\partial^3\gamma}{\partial x^3}\right| < \frac{A}{\rho}, \quad \left|\frac{\partial^3\gamma}{\partial x^3\, \partial y}\right| < \frac{A}{\rho}$$

следовательно, если точки $P_1$ и $P_2$ находятся в окрестности кривой $(C)$, в которой выполняется (2, 8), то [1])

$$\left|\iint\limits_{(D)}\left(\left[\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right]_1-\left[\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right]_2\right)h\,d\xi\,d\eta\right|\leqslant\iint\limits_{(D)}\frac{2Ad}{\rho}\,\frac{K}{\rho^{2-\nu}}\,d\xi\,d\eta\leqslant$$

$$\leqslant 4\pi AKd\int_1^\infty\frac{d\rho}{\rho^{2-\nu}}=\frac{4\pi A}{1-\lambda}Kd<AKd^\lambda.$$

Перейдем к оценке второго члена. Пусть $(D_1)$ внешность круга достаточно большого радиуса $R_0$ и $D_2$ дополнение к $(D_1)$ до области $(D)$. Разобьем второй интеграл на два слагаемых

$$\iint\limits_{(D)}\left[\frac{\partial^2\ln r}{\partial x^2}\right]_1^2 h\,d\xi\,d\eta=\iint\limits_{(D_1)}+\iint\limits_{(D_2)}$$

Первый интеграл оценивается так же как и выше, так как в области $(D_1)$

$$\left[\frac{\partial^2\ln r}{\partial x^2}\right]_1^2<\frac{Ad}{\rho^3}$$

Что же касается до второго слагаемого, то к нему мы можем применить теорему Корна [2]), из которой непосредственно следует, что он меньше чем $AKd^\lambda$.

Рассмотрим теперь третье слагаемое. Имеем

$$\frac{\partial^2\ln r^*}{\partial\iota^2}=\frac{\partial^2\ln r_*}{\partial x^{*2}}\left(\frac{\partial x^*}{\partial x}\right)^2+2\,\frac{\partial^2\ln r^*}{\partial x^*\partial y^*}\,\frac{\partial x^*}{\partial x}\,\frac{\partial y^*}{\partial y}+\frac{\partial^2\ln r^*}{\partial y^{*1}}\left(\frac{\partial y^*}{\partial x}\right)^2+$$

$$+\frac{\partial\ln r^*}{\partial x}\,\frac{\partial^2 x^*}{\partial x^2}+\frac{\partial\ln r^*}{\partial y}\,\frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2}$$

следовательно, для оценки интеграла, надо рассмотреть каждый из членов этой суммы. Рассмотрим, например, первый член суммы

$$\iint\limits_{(D)}\left[\left(\frac{\partial x^*}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\ln r^*}{\partial x^{*2}}\right]_1^2 h\,d\xi\,d\eta=\left[\left(\frac{\partial x^*}{\partial x}\right)^2\right]_1^2\iint\limits_{(D)}\left[\frac{\partial^2\ln r^*}{\partial x^2}\right]_1^2 h\,d\xi\,d\eta+$$

$$+\left[\left(\frac{\partial x^*}{\partial x}\right)^2\right]_1^2\iint\limits_{(D)}\frac{\partial^2\ln r^*}{\partial y^2}\,h\,d\xi\,d\eta.$$

[1]) Для того, чтобы не писать множества индексов, мы все константы, зависящие только от формы области и чисел $\lambda$ и $\nu$, будем обозначать только буквой $A$.

[2]) Korn. Ann. de l'Ecole Norm. sup. (1907). Теорема формулируется следующим образом: Если в некоторой конечной области распределена масса с поверхностной плотностью $\rho(x, y)$, удовлетворяющей неравенству

$$|\rho(x_1, y_1)-\rho(x_2, y_2)|<Ad^\lambda,$$

$0<\lambda<1$, то вторые производные потенциала удовлетворяют тому же неравенству с новой константой $C$, причем $C$ зависит только от формы области и показателя $\lambda$.

Первое слагаемое оценивается так же как предыдущий интеграл, что же касается второго, то

$$\left[\left(\frac{\partial x^*}{\partial x}\right)^2\right]_1^2 < Ad$$

и как будет показано ниже

$$\left|\iint\limits_{(D)}\left[\frac{\partial^2 \ln r^*}{\partial x^2}\right] h\,d\xi\,d\eta\right| < AK,$$

следовательно второй член не превосходит $AKd^\lambda$.

Если теперь точки $P_1$, $P_2$ лежат вне вышеупомянутой окрестности контура $(C)$, но внутри круга конечного радиуса $R_0$, все рассуждения повторяются, с тем упрощением, что член $\ln r^*$ будет входить в регулярную часть.

Произведем теперь оценку интеграла, для случая, когда точки $P_1$, $P_2$ расположены вне круга радиуса $R_0$, настолько большого, что вся кривая $(C)$ расположена внутри круга радиуса $R_0 : 2$.

Пусть $P_1$ и $P_2$ две такие точки и пусть $R$ расстояние до ближайшей из них от начала координат.

Имеем

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right]_1^2 = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(D)}\left[\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right]_1^2 h\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(D)}\left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}\right]_1^2 h\,d\xi\,d\eta = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(D)}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right]_1^2 h\,d\xi\,d\eta + \frac{1}{2}\left[h(x, y)\right]_1^2.$$

Третье слагаемое, очевидно, удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{2}|h_2 - h_1| < AKR^{2-\nu}\left(\frac{d}{R}\right)^\lambda$$

Оценим второй интеграл. Пользуемся последним из неравенств (2, 6) и неравенством (3, 2); тогда находим, что второй интеграл не превосходит

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(D)}\frac{Ad}{R^4\rho}\cdot\frac{K}{\rho^{2-\nu}}\,d\xi\,d\eta < AK\frac{d}{R^4}$$

и, так как $d < R$, правая часть неравенства меньше, чем

$$AKR^{\nu-2}\left(\frac{d}{R}\right)^\lambda.$$

Чтобы рассмотреть интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(D)}\left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}\right]_1^2 h\,d\xi\,d\eta,$$

разобьем область $(D)$ на четыре части. Для этого проведем из начала координат круг радиуса $R:2$ и обозначим пересечение нашей области с этим кругом через $(Q)$, круг с центром в середине отрезка $P_1P_2$ и радиуса $d$ обозначим через $(S)$, внутренность круга с центром в той же точке и радиуса $2R$, за вычетом (Q) и $(S)$, обозначим через $(T)$, а внешность этого круга через $(U)$.

Тогда

$$\iint\limits_{(D)}\left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}\right]_1^2 h\,d\xi\,d\eta=\iint\limits_{(Q)}+\iint\limits_{(S)}+\iint\limits_{(T)}+\iint\limits_{(U)}.$$

Мы будем отдельно оценивать каждое слагаемое:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(Q)}\left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}\right]_1^2 h\,d\xi\,d\eta\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(Q)}\frac{Ad}{R^3}\frac{K}{\rho^{2-\nu}}\,d\xi\,d\eta=AK\frac{d}{R^3}\int\limits_0^{\frac{R}{2}}\frac{d\rho}{\rho^{1-\nu}}\leqslant$$

$$\leqslant AK\frac{d}{R^{3-\nu}}\leqslant AKR^{\nu-2}\left(\frac{d}{R}\right)^{\lambda}$$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(U)}\left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}\right]_1^2 h\,d\xi\,d\eta\right|\leqslant\iint\limits_{(U)}\frac{Ad}{\rho^3}\frac{K}{\rho^{2-\nu}}\,d\xi\,d\eta=AK\frac{d}{R^{3-\nu}}\leqslant AKR^{\nu-2}\left(\frac{d}{R}\right)^{\lambda}$$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(T)}\left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}\right]_1^2 h\,d\xi\,d\eta\right|\leqslant|h_0|\left|\iint\limits_{(T)}\left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}\right]_1^2 d\xi\,d\eta\right|+$$

$$+\left|\iint\limits_{(T)}\left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}\right]_1^2(h-h_0)\,d\xi\,d\eta\right|$$

Интеграл от $\left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}\right]_1^2$, распространенный по всякому кругу с центром в середине отрезка $P_1P_2$ обращается в нуль, следовательно

$$|h_0|\left|\iint\limits_{(T)}\left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}\right]_1^2 d\xi\,d\eta\right|=|h_0|\left|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{R}{2}}\left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}\right]_1^2 d\xi\,d\eta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{K}{R^{2-\nu}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{R}{2}}\frac{Ad}{R^3}\rho\,d\rho\,d\varphi\leqslant AK\frac{d}{R^{3-\nu}}<AKR^{\nu-2}\left(\frac{d}{R}\right)^{\lambda}.$$

Надо теперь оценить интеграл

$$\iint\limits_{(T)}\left|\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}\right|_1^2|h-h_0|\,d\xi\,d\eta\leqslant\iint\limits_{(T)}\frac{Ad}{r^3}K\left(\frac{2r}{R}\right)^{\lambda}\left(\frac{R}{2}\right)^{\nu-2}r\,dr\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant AKR^{\nu-2}\frac{d}{R^{\lambda}}\int\limits_d^{\infty}\frac{dr}{r^{2-\lambda}}\leqslant AKR^{\nu-2}\left(\frac{d}{R}\right)^{\lambda}.$$

Перейдем наконец к оценке последнего члена

$$\iint\limits_{(S)}\left[\frac{\partial^2\ln r}{\partial x^2}\right]_1^2 h\,d\xi\,d\eta=\iint\limits_{(S)}\left[\frac{\partial^2\ln r}{\partial x^2}\right]_1(h-h_1)\,d\xi\,d\eta+h_1\iint\limits_{(S)}\left[\frac{\partial^2\ln r}{\partial x^2}\right]_1 d\xi\,d\eta+$$
$$+\iint\limits_{(S)}\left[\frac{\partial^2\ln r}{\partial x^2}\right]_2(h_2-h)\,h\,d\xi\,d\eta-h_2\iint\limits_{(S)}\left[\frac{\partial^2\ln r}{\partial x^2}\right]_2 d\xi\,d\eta.$$

Нетрудно убедиться, что второе и третье слагаемое обращаются в нуль, что же касается двух других интегралов, то они оцениваются следующим образом:

$$\left|\iint\limits_{(S)}\left[\frac{\partial^2\ln r}{\partial x^2}\right]_1(h-h_1)\,d\xi\,d\eta\right|\leqslant\iint\limits_{(S)}\left|\frac{\partial^2\ln r}{\partial x^2}\right|_1(h-h_1)\,d\xi\,d\eta\leqslant$$
$$\leqslant\iint\limits_{(S)}\frac{1}{r_1^2}\frac{Kr_1^\lambda}{R^{2-\nu}R^\lambda}\,r_1\,dr_1\,d\varphi\leqslant\frac{2\pi K}{R^{2-\nu+\lambda}}\int\limits_0^{2d}r^{\lambda-1}\,dr<AKR^{\nu-2}\left(\frac{d}{R}\right)^\lambda$$

Сопоставляя все полученные неравенства, находим

$$\left|\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]_1-\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]_2\right|<AKR^{\nu-2}\left(\frac{d}{R}\right)^\lambda.$$

Совершенно аналогично доказываются неравенства для разности двух других вторых производных.

Переходя к оценке самих вторых производных, заметим, что требующиеся неравенства достаточно доказать только при $R>R_0$, так как имея неравенства только при $R>R_0$ и пользуясь полученной оценкой для разности вторых производных, очевидно получаем неравенства для всей области $(D)$.

Доказательство этих неравеств протекает совершенно аналогично

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(D)}\frac{\partial^2\ln r}{\partial x^2}\,d\xi\,d\eta\,\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(D)}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\,h\,d\xi\,d\eta+\frac{1}{2\pi}h(x,\,y).$$

Каждое слагаемое снова оцениваем отдельно

$$\left|\frac{1}{2}h\right|<\frac{1}{2}KR^{\nu-2}$$

пользуясь неравенством (2, 6)

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(D)}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\,h\,d\xi\,d\eta\right|<\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(D)}\frac{A}{R^3}\frac{K}{\rho^{2-\nu}}\rho\,d\rho\,d\varphi<AKR^{\nu-2}.$$

Оценка первого интеграла и в этом случае протекает несколько сложнее именно

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(D)}\frac{\partial^2\ln r}{\partial x^2}h\,d\xi d\eta=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(Q)}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(T+S)}\int+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(U)}.$$

Интегралы, стоящие в правой части, оцениваются следующим образом:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(Q)}\frac{\partial^2\ln r}{\partial x^2}h\,d\xi d\eta\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(Q)}\frac{4}{R^2}\frac{K}{\rho^{2-\nu}}\rho\,d\rho d\varphi<AKR^{\nu-2}$$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(U)}\frac{\partial^2\ln r}{\partial x^2}h\,d\xi d\eta\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(U)}\frac{A}{\rho^2}\frac{K}{\rho^{2-\nu}}\rho\,d\rho d\varphi<AKR^{\nu-2}$$

$$\int\limits_{(T+S)}\int\frac{\partial^2\ln r}{\partial x^2}h\,d\xi d\eta=h_0\int\limits_{(T+S)}\int\frac{\partial^2\ln r}{\partial x^2}d\xi d\mu+\int\limits_{(T+S)}\int\frac{\partial^2\ln r}{\partial x^2}(h-h_0)\,d\xi d\eta,$$

где $h_0=h(\mathrm{P})$. Интеграл от $\frac{\partial^2\ln r}{\partial x^2}$ по кругу с центром в точке P обращается в нуль, следовательно

$$|h_0|\left|\int\limits_{(T+S)}\int\frac{\partial^2\ln r}{\partial x^2}d\xi d\eta\right|=|h_0|\left|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{R}{2}}\frac{\partial^2\ln r}{\partial x^2}\rho\,d\rho d\varphi\right|\leqslant$$

$$\leqslant KR^{\nu-2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{R}{2}}\frac{4}{R^2}\rho\,d\rho d\varphi<AKR^{\nu-2}.$$

Остается еще рассмотреть интеграл

$$\left|\int\limits_{(T+S)}\int\frac{\partial^2\ln r}{\partial x^2}(h-h_0)\,d\xi d\eta\right|\leqslant\int\limits_{(T+S)}\int\frac{1}{r^2}K\left(\frac{R}{2}\right)^{\nu-2}\left(\frac{2r}{R}\right)^{\lambda}r\,dr d\theta<AKR^{\nu-2}.$$

Совершенно таким же образом протекает доказательство неравенства для $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$.

Рассмотрим, наконец, первые производные. В этом случае, снова достаточно доказать неравенства для $R>R_0$.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(D)}\int\frac{\partial G}{\partial x}h\,d\xi d\eta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(D)}\int\frac{\partial\ln r}{\partial x}h\,d\xi d\eta+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(D)}\int\frac{\partial g}{\partial x}h\,d\xi d\eta.$$

Из неравенств (2, 6)

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|<\frac{A}{R^2\rho}$$

следовательно

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(D)}\int\frac{\partial g}{\partial x}h\,d\xi\,d\eta\right| < AKR^{1-\nu}$$

Второй интеграл, так же как для вторых производных, разбиваем на три части:

$$\int\limits_{(D)}\int = \int\limits_{(Q)}\int + \int\limits_{(U)}\int + \int\limits_{(T+S)}\int$$

Тогда

$$\left|\int\limits_{(Q)}\int\frac{\partial \ln r}{\partial x}h\,d\xi\,d\eta\right| \leqq \int\limits_{(Q)}\int\frac{2}{R}\frac{K}{\rho^{2-\nu}}\rho\,d\rho\,d\varphi < AKR^{\nu-1}$$

$$\left|\int\limits_{(U)}\int\frac{\partial \ln r}{\partial x}h\,d\xi\,d\eta\right| \leqslant \int\limits_{(U)}\int\frac{2}{\rho}\frac{K}{\rho^{2-\nu}}\rho\,d\rho\,d\varphi < AKR^{\nu-1}$$

$$\left|\int\limits_{(T+S)}\int\frac{\partial \ln r}{\partial x}h\,d\xi\,d\eta\right| \leqslant \int\limits_{(T+S)}\int\frac{1}{r}K\left(\frac{R}{2}\right)^{\nu-2}r\,dr\,d\varphi < AKR^{\nu-1}$$

отсюда следует требуемая оценка. Аналогично получим оценку для $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

Неравенство для $\varphi$ получаем непосредственно из формулы

$$\varphi = \int\limits_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy\right).$$

Таким образом мы доказали, что $\varphi(x, y)$ удостоверяет уравнению (3, 1) и неравенствам (3, 6). Остается еще доказать, что оно удовлетворяет условию (3, 3). Чтобы это сделать разобьем область $(D)$ на три части; из начала координат опишем круг, охватывающий контур $(C)$ некоторого радуса $R_0$, и из точки контура $M$, опишем круг радиуса $d$. Пересечение внутренности этого круга с областью $(D)$ назовем $(Q)$, внешность круга радиуса $R_0$ назовем чрез $(T)$ и остальную часть $(U)$. Пусть точка P приближается к $M$.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(D)}\int\frac{\partial G}{\partial n}h\,d\xi\,d\eta = \int\limits_{(Q)}\int + \int\limits_{(T)}\int + \int\limits_{(U)}\int$$

$$\left|\int\limits_{(T)}\int\frac{\partial G}{\partial n}h\,d\xi\,d\eta\right| \leqslant \int\limits_{(T)}\int\frac{A}{\rho}K^{2-\nu}\rho\,d\rho\,d\varphi < AKR_0^{\nu-1}$$

$$\int\limits_{(Q)}\int\frac{\partial G}{\partial n}h\,d\xi\,d\eta = \int\limits_{(Q)}\int\frac{\partial \ln r}{\partial n}h\,d\xi\,d\eta + \int\limits_{(Q)}\int\frac{\partial \ln r^*}{\partial n}h\,d\xi\,d\eta + \int\limits_{(Q)}\int\gamma h\,d\xi\,d\eta.$$

Полученные интегралы оцениваются следующим образом:

$$\left|\int\limits_{(Q)}\int \gamma h\, d\xi\, d\eta\right| < AKd^2$$

$$\left|\int\limits_{(Q)}\int \frac{\partial \ln r}{\partial n} h\, d\xi\, d\tilde{\eta}\right| \leqq K \int\limits_0^{2d}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{r} r\, dr\, d\varphi < 4\pi Kd$$

и

$$\int\limits_{(Q)}\int \frac{\partial \ln r^*}{\partial n} h\, d\xi\, d\eta$$

оценивается аналогично и не превосходит $AKd$.

В области $(U)$, $\dfrac{\partial G}{\partial n}$ равномерно стремится к нулю, когда точка $P$ приближается к $M$, следовательно

$$\lim_{P\to M} \int\limits_{(U)}\int \frac{\partial G}{\partial n} h\, d\xi\, d\eta = 0$$

Так как $R_0$ может быть взято сколь угодно большим, а $d$ сколь угодно малым, условие (3,3) выполняется.

*Теорема III.* Пусть $h(x, y)$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно, и

$$\left.\begin{aligned} |h| &< KR^{\nu-2}, \\ \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial h}{\partial y}\right| &< KR^{\nu-3}, \\ \left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right|,\ \left|\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}\right|,\ \left|\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right| &< KR^{\nu-4}, \\ \left|\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right]_1^2\right|, \ldots &< KR^{\nu-4}\left(\frac{d}{R}\right)^{\lambda}, (d < R). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3,8)$$

и $\varphi(x, y)$ функция, данная формулой (3,5); тогда $\varphi(x, y)$ удовлетворяет неравенствам

$$\left.\begin{aligned} |\varphi| &< AKR^{\nu} \\ \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right| &< AKR^{\nu-1} \\ \left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right|, \ldots &< AKR^{\nu-2} \\ \left|\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right|, \ldots &< AKR^{\nu-3} \\ \left|\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right|, \ldots &< AKR^{\nu-4} \\ \left|\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right|_1^2, \ldots &< AKR^{\nu-4}\left(\frac{d}{R}\right)^{\lambda} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3,9)$$

при $d < R$.

Совершенно аналогично теорему можно сформулировать для случая $n$-ой производной. Мы выбираем для доказательства случай $n = 2$, так как он нам будет нужен для приложений.

Чтобы доказать эту теорему, надо несколько видоизменить доказательство, приведенное для случая $n = 0$. Мы укажем на эти изменения. Пусть надо доказать неравенства, стоящие в последней строке

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \int\int_{(D)} Ghd\xi d\eta$$

Мы начнем доказывать неравенство для случая, когда $P_1$, $P_2$ находятся вне круга радиуса $R_0$.

Что касается до слагаемого производимого $g(x, y; \xi, \eta)$, то здесь оценка производится совершенно аналогично. Мы рассмотрим только слагаемое производимое $\lg r$.

Пользуясь тем же разбиением, как и в предыдущем параграфе, имеем

$$\delta \frac{\partial^4}{\partial x^4} \int\int_{(D)} Ghd\xi d\eta = \delta \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left\{ \int\int_{(Q)} + \int\int_{(U)} + \int\int_{(S+T)} \right\}$$

Что касается двух первых интегралов, то они оцениваются совершенно так же, как и раньше, что же касается третьего интеграла, то, обозначая через $(L)$ границу области $(T+S)$, имеем после интегрирования по частям:

$$\delta \frac{\partial^4}{\partial x^4} \int\int_{(S+T)} \ln r h \, d\xi d\eta = + \int_{(L)} \delta \frac{\partial^3 \ln r}{\partial x^3} h d\eta - \int_{(L)} \delta \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \frac{\partial h}{\partial \xi} d\eta +$$
$$+ \int\int_{(T+S)} \delta \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} d\xi d\eta + \pi\delta \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

Интеграл по области $(S+T)$ оценивается так же, как и раньше, разбивая его по областям $(S)$ и $(T)$, что же касается линейных интегралов, то

$$\left| \int_{(L)} \delta \frac{\partial^3 \ln r}{\partial x^3} h \, d\eta \right| \leqslant \int_{(L)} \frac{16d}{R^4} K \left(\frac{R}{2}\right)^{\nu-2} ds \leqslant AK \frac{d}{R^{5-\nu}} < AKR^{\nu-4} \left(\frac{d}{R}\right)^{\lambda}$$

$$\left| \int_{(L)} \delta \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \frac{\partial h}{\partial \xi} d\eta \right| \leqslant \int_{(L)} \frac{8d}{R^3} K \left(\frac{R}{2}\right)^{\nu-3} ds \leqslant AKR^{\nu-4} \left(\frac{d}{R}\right)^{\lambda}$$

Путем применения такого же преобразования доказываются остальные неравенства (3,9), когда точка $P$ находится вне некоторого круга радиуса $R_0$.

Сделаем теперь оценки для случая, когда точки $P_1$ и $P_2$ находятся в некоторой достаточно малой окрестности контура, в которой применима формула (2, 8).

Для того, чтобы сделать такого рода оценку, мы полагаем

$$G = \ln \frac{rr^*}{\rho^2} + \gamma$$

и так же, как и раньше, все сводится к тому, чтобы сделать оценки для слагаемого, содержащего $\ln r$. Чтобы сделать такую оценку, мы можем всегда предполагать, что точки $P_1$ и $P_2$ находятся вблизи прямолинейного участка контура $(C)$; так как мы можем всегда свести задачу к этому случаю, совершив конформное отображение нашей области. Мы предположим, что этот прямолинейный участок контура $(C)$ принят за ось $x$.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\delta \frac{\partial^4}{\partial x^4} \int\limits_{(D)} \int \ln r d\xi d\eta$$

Для оценки этого интеграла разобьем область на три части. Именно, из точки, лежащей на средине отрезка $P_1 P_2$ проведем круг радиуса $d$ и круг радиуса $R_0$, где $R_0$ некоторое фиксированное число. Пересечение первого круга с областью $(D)$ назовем $(S)$, пересечения кольца, между двумя построенными концентрическими кругами с областью $(D)$ обозначим через $(T)$ и остальную часть $(D)$ через $(U)$. Тогда

$$\delta \frac{\partial}{\partial x^4} \int\limits_{(D)} \int \ln rh \, d\xi d\eta = \int\limits_{(U)} \int \delta \frac{\partial^4 \ln r}{\partial x^4} h d\xi d\eta + \delta \frac{\partial^4}{\partial x^4} \int\limits_{(S+T)} \int \ln rh \, d\xi d\eta$$

Оценка первого члена получается так:

$$\left| \int\limits_{(U)} \int \delta \frac{\partial^4 \ln r}{\partial x^4} h d\xi d\eta \right| \leqq \int\limits_{(U)} \int \frac{d}{\rho^4} K \rho^{\nu-2} \rho d\rho d\varphi < AKd.$$

и так как в разбираемом случае достаточно провести доказательство для $d < 1$, рассматриваемый интеграл не превосходит $AKd^\lambda$.

Что касается второго слагаемого, его преобразуем двойным интегрированием по частям. Обозначая через $(L)$ границу $(S+T)$, имеем:

$$\delta \frac{\partial^4}{\partial x^4} \int\limits_{(S+T)} \int \ln r h d\xi d\eta = - \int\limits_{(L)} \delta \frac{\partial^3 \ln r}{\partial x^3} h d\eta - \int\limits_{(L)} \delta \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \frac{\partial h}{\partial \xi} d\eta +$$

$$+ \int\limits_{(T+S)} \int \delta \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} h d\xi d\eta + \pi \delta \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

Так как части линейных интегралов, распространенные на ось $x$ исчезают, непосредственно выводим, что линейные интегралы не превосходят

$$AKd < AKd^{\lambda}.$$

Оценим поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{(T+S)} \delta \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x_1^{\,2} x^2} h\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right]_1 \iint\limits_{(T+S)} \delta \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}\, d\eta - \iint\limits_{(T+S)} \delta \frac{\partial^2 \ln r}{dx^2} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}\right] d\xi\, d\eta$$

Первый интеграл преобразуем, снова частным интегрированием в линейный и также убеждаемся, что его величина не превосходит $Ad$. Часть второго слагаемого, приходящаяся на область $(T)$, оценивается так же, как и выше, и следовательно остается еще рассмотреть интеграл по области $(S)$.

$$\iint\limits_{(S)} \delta \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^{\,2}} - \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}\right] d\xi\, d\eta = \iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}\right]_1 \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^{\,2}} - \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}\right] d\xi\, d\eta -$$

$$- \iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}\right]_2^1 \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^{\,2}} - \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}\right] d\xi\, d\eta + \iint\limits_{(S)} \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x_2^{\,2}} d\xi\, d\eta \cdot \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^{\,2}} - \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^{\,2}}\right]$$

Оценка первых двух членов производится так же, как и выше, что же касается третьего члена, то для оценки мы преобразуем поверхностный интеграл в линейный,

$$\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^{\,2}} - \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^{\,2}}\right] \iint\limits_{(S)} \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x_2^{\,2}} d\xi\, d\eta = \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^{\,2}} - \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^{\,2}}\right] \int - \frac{\partial \ln r}{\partial x^2} d\eta$$

Первый множитель не превосходит $Kd^{\lambda}$, что же касается второго, то так как часть линейного интеграла, распространенная по оси $x$, исчезает

$$\left| \int \frac{\partial \ln r}{\partial x^2}\, d\eta \right| \leqslant \left| \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \ln r}{\partial x_2} \right| d \cdot ds \right| \leqslant 2\pi.$$

*Теорема IV.* Предположим, что функция $h(x, y)$ определенная в области $(D)$, вне некоторой окрестности одной из точек контура $A$ удовлетворяет неравенствам (3,2) и внутри этой окрестности неравенствам

$$\left.\begin{aligned} |h| &< K\bar{R}^{\varepsilon} \\ |h_1 - h_2| &< K\bar{R}^{\varepsilon} \left(\frac{d}{\bar{R}}\right)^{\lambda} \left(d < \bar{R}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3{,}10)$$

где $\overline{R}$ расстояние от $A$ до ближайшей из точек $P_1$, $P_2$ и пусть $T(x, y; \xi, \eta)$ функция Грина, такая, что соответствующий ей поток имеет сход струй в точке $A$. При этих условиях

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(D)} T(x, x; \xi, \eta)\, d\xi d\eta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3{,}11)$$

удовлетворяет вне окрестности точки $A$ условиям (3,6), а внутри окрестности точки $A$

и при $d < R$

$$\left.\begin{aligned} &|\varphi|, \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right| < AK \\ &\left|\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]_1^2\right|, \ldots < AK\left(\frac{d}{\overline{R}}\right)^{\lambda} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3{,}12)$$

причем в самой точке $A$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3{,}13)$$

Неравенства (3,6) доказываются точно так же, как и в случае теоремы I. Остается только доказать, что выполняются неравенства (3,12). При доказательстве теоремы мы можем предположить, подобно тому, как это делалось выше, что участок линии $(C)$, содержащий точку $A$, прямолинеен.

Мы докажем неравенства относительно разностей вторых производных. В окрестности точки $A$ функцию Грина можно представить в виде

$$T(x, y; \xi, \eta) = \ln\frac{rr^*}{\rho^2} + \widetilde{T}(x, y; \xi, \eta)$$

Оценим слагаемое, происходящее от члена $\ln r$. Для этого разобьем область $(D)$ на пять частей: $(Q)$ — пересечение круга радиуса $\overline{R}:2$ с центром в точке $A$ и области $(D)$; $(S)$ — пересечение с областью $(D)$ круга радиуса $d$ с центром $P_0$ в середине отрезка $P_1P_2$; $(T)$ — пересечение кольца, заключенного между окружностями радиуса $d$ и $\overline{R}:2$ с центром $P_0$ и области $(D)$ $\left(\text{мы будем предполагать } d < \frac{\overline{R}}{2}\right)$; $(U)$ — часть области $(D)$, лежащая вне круга, описанного из точки $A$ некоторым фиксированным радиусом $R_0$, и наконец через $(V)$ оставшуюся часть области $(D)$.

При этом разбиении получим

$$\delta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\iint\limits_{(D)} \ln r h\, d\xi d\eta = \delta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\iint\limits_{(U)} + \iint\limits_{(V)} + \iint\limits_{(Q)} + \iint\limits_{(T)} + \iint\limits_{(S)}\right\}$$

($\delta$ показывает, что взята разность соответствующих выражений в точках $P_1$ и $P_2$).

Переходим к оценке полученных пяти интегралов

$$\left|\delta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\iint\limits_{(U)}\right| = \left|\iint\limits_{(U)}\delta\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}h\,d\xi\,d\eta\right| \leqslant \iint\limits_{(U)}\frac{Ad}{\rho^5}\frac{K}{\rho^{2-\nu}}\,d\xi\,d\eta < AKd^{\nu} < AK\left(\frac{d}{\overline{R}}\right)^{\lambda}$$

$$\left|\delta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\iint\limits_{(V)}\right| = \left|\iint\limits_{(V)}\delta\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}h\,d\xi\,d\eta\right| \leqslant \iint\limits_{(V)}\frac{d}{r^3}K(2r)^{\varepsilon}\,d\xi\,d\eta < 2^{1+\varepsilon}\pi Kd\int\limits_{\frac{d}{2}}^{\infty}\frac{dr}{r^{2-\varepsilon}} <$$

$$< AK\frac{d}{\overline{R}^{1-\varepsilon}} < AK\left(\frac{d}{\overline{R}}\right)^{\lambda}$$

$$\left|\delta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\iint\limits_{(Q)}\cdot\right| = \left|\iint\limits_{(Q)}\delta\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}h\,d\xi\,d\eta\right| < \iint\limits_{(Q)}\frac{d}{\left(\frac{\overline{R}}{2}\right)^3}K\left(\frac{\overline{R}}{2}\right)d\xi\,d\eta < AK\left(\frac{d}{\overline{R}}\right)^{\lambda}.$$

Последние два интеграла мы разобьем на две части и затем один из полученных интегралов проинтегрируем по частям. Обозначая через $(L)$ границу области $(T+S)$, получим:

$$\left|\delta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\iint\limits_{(T+S)}\right| = \pi\delta h + \iint\limits_{(T+S)}\delta\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}h\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \pi\delta h + \iint\limits_{(T+S)}\delta\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}(h - h_1)\,d\xi\,d\eta - h_1\int\limits_{(L)}\delta\frac{\partial \ln r}{\partial x}\,d\eta.$$

Оценим линейный интеграл

$$|h_1|\int\limits_{(L)}\delta\frac{\partial \ln r}{\partial x}\,d\eta < K(2\overline{R})^{\varepsilon}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d}{\left(\frac{\overline{R}}{2}\right)^2}\overline{R}\,d\varphi < AK\frac{d}{\overline{R}^{1-\varepsilon}} < AK\left(\frac{d}{\overline{R}}\right)^{\lambda}$$

Оценка поверхностного интеграла протекает так же, как и подобная оценка в теореме II.

Член, производимый слагаемым $\ln r^*$, сводится к выражению, разобранному приемом, употребленным в теореме II.

Рассмотрим теперь функцию $\widetilde{T}(x, y; \xi, \eta)$. Эта функция по (2,9) может быть приведена к виду

$$\gamma(x, y; \xi, \eta) + \psi(x, y)\chi(\xi, \eta)$$

где $\psi(x, y)$ регулярная функция $x$, $y$ в окрестности контура $(C)$. Следовательно, член, производимый $\widetilde{T}(x, y); \xi, \eta)$ имеет вид

$$\iint\limits_{(D)}\gamma h\,d\xi\,d\eta + \psi(x, y)\iint\limits_{(D)}\chi h\,d\xi\,d\eta$$

Что касается второго слагаемого, то оно оценивается непосредственно, а оценка первого дана при доказательстве теоремы I. Принимая это во внимание, мы докажем неравенства для разностей вторых производных. Остальные неравенства (3,12) получаются аналогичными выкладками.

Равенства (3,13) следуют из того, что производные функции $T(x, y; \xi, \eta)$ по $x$ и $y$ при фиксированных $\xi$ и $\eta$ стремятся к нулю, когда точка $x$, $y$ приближается к точке контура $M$, причем это стремление равномерно, если точка $\xi$, $\eta$ находится внутри круга фиксированного радиуса и вне окрестности точки $A$.

Комбинируя метод доказательства теоремы III и IV, нетрудно доказать еще следующую теорему:

*Теорема V.* Пусть $h$ удовлетворяет в окрестности точки $A$ неравенствам

$$\left.\begin{aligned} |h| &< K\overline{R}^{\varepsilon} \\ \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial h}{\partial y}\right| &< K\overline{R}^{\varepsilon-1} \\ \left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right| &< K\overline{R}^{\varepsilon-2} \\ \left|\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right]_1^2\right|, \ldots &< K\overline{R}^{\varepsilon-2}\left(\frac{d}{\overline{R}}\right)^{\lambda} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3,14)$$

и при $d < R$

а вне окрестности точки $A$ неравенствам (3,8), тогда функция $\varphi(x, y)$, определенная равенством (3,11), удовлетворяет в окрестности точки $A$ системе неравенств.

$$\left.\begin{aligned} |\varphi|, \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right| &< AK \\ \left|\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right|, \quad \left|\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2\,\partial y}\right|, \ldots &< AK\overline{R}^{\varepsilon-1} \\ \left|\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right|, \quad \left|\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^3\,\partial y}\right|, \ldots &< AK\overline{R}^{\varepsilon-2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3,15)$$

и при $d < \overline{R}$

$$\left|\left[\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right]_1^2\right|, \quad \left|\left[\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^3\,\partial y}\right]_1^2\right|, \ldots < AK\overline{R}^{\varepsilon-2}\left(\frac{d}{R}\right)^{\lambda}$$

и вне окрестности точки $A$ неравенствам (3,9).

### 4. Задача Neuman'а для одного класса нелинейных эллиптических уравнений

Изложенные в предыдущих параграфах результаты мы приложим к доказательству существования решения внешней задачи Neuman'а для уравнений вида

$$\Delta u = \mu F(x, y, u, p, q, r, s, t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4,1)$$

где $\mu$ параметр, а $F$ функция, удовлетворяющая следующим условиям:

При всяком $\nu$, $0 < \nu < 1$, существует константа $K(\nu) = K$ такая, что выполняются неравенства:

$1^0$. Если аргументы функции $F$, $x, y, p, q, r, s, t$ изменяются в области, определенной условиями: при

$$\left.\begin{gathered} x^2 + y^2 = R^2 \\ |u| < CR^{\nu}, \quad |p|, |q| < CR^{\nu-1}, \quad |r|, |s|, |t| < CR^{\nu-2} \end{gathered}\right\} \quad . \quad . \quad (4,2)$$

то

$$|F(x, y, u, p, q, r, s, t)| < KR^{\nu-2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4,3)$$

$2^0$. Пусть точки $x_1, y_1, p_1, \ldots . t_1$ и $x_2, y_2, u_2, \ldots . t_2$ находятся в области, определенной неравенствами (4, 2) и

$$R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \qquad R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2},$$

а $R$ наименьшее из чисел $R_1$ и $R_2$, тогда при $d < R$,

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

выполняется неравенство

$$|F_2 - F_1| < K\left| R^{\nu-2}\left(\frac{d}{R}\right)^{\lambda} + \frac{|u_2 - u_1|}{R^2} + \frac{|p_2 - p_1| + |q_2 - q_1|}{R} + \right.$$
$$\left. + |r_2 - r_1| + |s_2 - s_1| + |t_2 - t_1| \right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4,4)$$

$3^0$. Положим

$$\Phi = F(x, y, u', p', \ldots . t') - F(x, y, u, p, \ldots . t),$$

$\omega = u' - u$, $\pi = p' - p$, $\varkappa = q' - q$, $\rho = r' - r$, $\sigma = s' - s$, $\tau = t' - t$;

для каждых четырех точек

$$\begin{gathered} x_1, y_1, u_1, \ldots . t_1 \\ x_1, y_1, u_1', \ldots . t_1' \\ x_2, y_2, u_2, \ldots . t_2 \\ x_2, y_2, u_2', \ldots . t_2' \end{gathered}$$

области определенной неравенствами (4, 2), удовлетворяющих условиям

$$|\omega| < \Omega R^{\nu},\ |\pi|, |\varkappa| < \Omega R^{\nu-1},\ |\rho|, |\sigma|, |\tau| < \Omega R^{\nu-2} \quad . \quad (4,5)$$

выполняется неравенство

$$|\Phi_2 - \Phi_1| < K\left|\Omega R^{\nu-2}\left(\frac{d}{R}\right)^{\lambda} + \frac{|\omega_2-\omega_1|}{R^2} + \frac{|\pi_2-\pi_1|}{R} + |\varkappa_2-\varkappa_1| + \right.$$
$$\left. + |\rho_2-\rho_1| + |\sigma_2-\sigma_1| + |\tau_2-\tau_1|\right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4,6)$$

При этих условиях докажем следующую теорему:

*Теорема.* Пусть $(C)$ замкнутая аналитическая кривая без особых точек и $(D)$ внешняя часть плоскости, ограниченная этой кривой. Для всех достаточно малых значений параметра $\mu$ уравнение (4, 1) имеет единственное решение, определенное в области $D$, удовлетворяющее на контуре области по условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4,7)$$

а внутри ее неравенствам

$$\left.\begin{gathered} |\varphi| < CR^{\nu} \\ \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right| < CR^{\nu-1} \\ \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|, \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right|, \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right| < CR^{\nu-2} \\ \left|\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]_1^2\right|, \left|\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right]_1^2\right|, \left|\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right]_1^2\right| < CR^{\nu-2}\left(\frac{d}{R}\right)^{\lambda} \end{gathered}\right\} \quad . \quad . \quad (4,8)$$

где $\nu$ и $\lambda$ два числа, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < \nu < 1, \qquad 0 < \lambda < 1.$$

Для доказательства существования решения применим метод последовательных приближений

$$\varphi_0(x, y) = 0$$

$$\varphi_n(x, y) = \frac{\mu}{2\pi}\iint\limits_{(D)} G(x, y; \xi, \eta)\, F_{n-1}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta$$

причем $F_{n-1}(\xi, \eta)$ есть функция, получающаяся после подстановки в $F$, $\varphi_{n-1}$.

Докажем прежде всего, что при достаточно малых значениях параметра $\mu$ и при любом значении $n$, приближения $\varphi_n(x, y)$ удовлетворяют не-

равенствам (4, 8) и краевому условию (4, 7). Пусть $\varphi_{n-1}(x, y)$ удовлетворяет условиям (4, 8). На основании условий $1^0$ и $2^0$ получаем

$$|F_{n-1}(x, y)| < KR^{\nu-2}$$

и при $d < R$

$$|F_{n-1}(x_1, y_1) - F_{n-1}(x_2, y_2)| < KR^{\nu-2}\left(\frac{d}{R}\right)^{\lambda} \cdot (6C+1)$$

Из теоремы II предыдущего параграфа непосредственно следует, что $\varphi_n(x, y)$ удовлетворяет условиям (4, 8) с новой константой $|\mu| AK(6C+1)$, где $A$ зависит только от формы области $(D)$ и показателей $\nu$ и $\lambda$. Если

$$|\mu| < \frac{C}{AK(6C+1)}$$

то приходим к неравенствам (4, 8) с той же константой $C$. Докажем теперь что последовательность функций $\varphi_n(x, y)$ равномерно сходится.

Предположим, что разность

$$\omega_{n-1} = \varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}$$

удовлетворяет условиям (4, 5) с константой $\Omega_{n-1}$.

Положим

$$\Phi_n = F_n - F_{n-1}$$

тогда из условия $2^0$ следует неравенство

$$|\Phi_{n-1}| < K\left|\frac{|\omega_{n-1}|}{R^2} + \frac{|\pi_{n-1}| + |\varkappa_{n-1}|}{R} + |\rho_{n-1}| + |\sigma_{n-1}| + |\tau_{n-1}|\right|.$$

Комбинируя это с неравенствами для $\omega_{n-1}$, получаем

$$|\Phi_{n-1}| \leqq \frac{6K\Omega_{n-1}}{R^{2-\nu}}$$

Из предположения 3° из неравенств для $\omega_{n-1}$ находим при $d < R$

$$|\Phi_{n-1,\,1} - \Phi_{n-1,\,2}| < \frac{13K\Omega_{n-1}}{R^{2-\nu}}\left(\frac{d}{R}\right)^{\lambda}$$

Из полученных для $\Phi_{n-1}$ неравенств, опять-таки при помощи теоремы II предыдущего параграфа следует, что

$$\omega_n = \frac{\mu}{2\pi}\iint\limits_{(D)} G\Phi_{n-1}\,d\xi d\eta$$

удовлетворяет условиям (4, 5) с новой константой

$$\Omega_n = 13AK|\mu|\Omega_{n-1}.$$

Если теперь

$$|\mu| < \frac{q}{13AK}$$

где $q$ произвольное число — меньшее единицы

$$\Omega_n \leqslant q\Omega_{n-1}.$$

Отсюда непосредственно следует, что последовательные приближения $\varphi_n(x, y)$ равномерно сходятся так же, как и их производные двух первых порядков. Пусть

$$\varphi(x, y) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x, y);$$

производные функции $\varphi_n(x, y)$ вследствие их равномерной сходимости сходятся к производным от функции $\varphi(x, y)$, и следовательно эти последние удовлетворяют неравенствам (4, 8) и краевому условию (4, 7). Из равномерной сходимости также непосредственно следует, что $\varphi(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (4, 1).

Докажем теперь, что при достаточно малых $|\mu|$ не существует второго решения, удовлетворяющего условиям (4, 8) ни при каком $\lambda$ и $\nu$. Не теряя общности, мы можем предположить, что показатели $\lambda$ и $\nu$ для обоих решений $\varphi$ и $\psi$ совпадают.

Пусть

$$\Phi = F_\varphi - F_\psi$$

тогда имеет место соотношение

$$\varphi - \psi = \frac{\mu}{2\pi} \iint\limits_{(D)} G\Phi \, d\xi d\eta.$$

Если функция удовлетворяла неравенствам (4, 8) с некоторой константой $C'$, то, воспользовавшись условиями $2^0$ и $3^0$, и применив к последнему соотношению теорему II предыдущего параграфа, получим для $\varphi - \psi$ неравенства (4, 8) с новой константой $13AK|\mu|$. Если

$$|\mu| < \frac{q}{13AKC'}, \quad (q < 1)$$

то новая константа не превосходит $qC'$. Продолжая применять это рассуждение, получим

$$|\varphi - \psi| < q^n C'$$

откуда следует $\varphi = \psi$. Таким образом единственность решения доказана.

Если $F$ есть аналитическая функция $u$, $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, то решение будет аналитической функцией $\mu$. Во-первых, очевидно, что всякое приближение есть в этом случае аналитическая функция $\mu$, кроме того последовательность $\varphi_n(x, y; \mu)$ сходится равномерно при $|\mu| < \mu_0$, отсюда немедленно вытекает правильность нашего утверждения.

На основании этого, решение задачи может быть получено подстановкой в уравнение ряда

$$\varphi = \varphi_0 + \mu\varphi^{(1)} + \ldots\ldots + \mu^n \varphi^{(n)} + \ldots\ldots \quad (4, 9)$$

Сравнив коэффициенты в обеих частях уравнения при одинаковых степенях $\mu$, мы получим рекуррентные уравнения для определения коэффициентов ряда (4, 9).

$$\Delta\varphi^{(n)} = H^{(n)}$$

где $H^{(n)}$ есть выражение, зависящее от $n-1$ первых коэффициентов ряда (4, 9). Функция $\varphi^{(n)}$ определится формулой

$$\varphi^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(D)} GH\, d\xi d\eta.$$

### 5. Аналитический характер решения

Предположим теперь, что функция $F(x, y, u, p, q, r, s, t)$ есть аналитическая всех своих аргументов, когда $x$ и $y$ пробегают область $(D)$ и остальные аргументы удовлетворяют неравенствам (4, 5). При некоторых добавочных ограничениях, наложенных на правую часть уравнения (4, 1), можно доказать, что при достаточно малых значениях параметра $\mu$ решение внешней задачи Neuman'а будет аналитической функцией $x$ и $y$. Для доказательства мы воспользуемся следующей теоремой Леви:[1]

Пусть дано уравнение эллиптического типа

$$\Psi(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$$

левая часть которого есть аналитическая функция всех своих аргументов. Всякое решение уравнения (5, 1), имеющее в окрестности точки $(x_0, y_0)$ непрерывные частные производные до четвертого порядка включительно, есть аналитическая функция переменных $(x, y)$ в окрестности точки $(x_0, y_0)$

[1] Math. Ann., Bd. 101, S. 609.

Наложим на правую часть уравнения (4, 1) следующего рода ограничения:

$1^0$. Пусть $x^2 + y^2 = R^2$ и

$$\left.\begin{aligned} &|u| < CR^\nu, \quad |p_1|, |p_2| < CR^{\nu-1}, \quad |p_{11}|, |p_{12}|, |p_{22}| < CR^{\nu-2} \\ &|p_{111}|, |p_{112}|, \ldots\ldots < CR^{\nu-3}, \quad |p_{1111}|, |p_{1112}|, \ldots\ldots < CR^{\nu-4} \end{aligned}\right\} \quad (5, 2)$$

($p$ со значками обозначают производные $u$, причем число единиц указывает порядок дифференцирования по $x$ и число двоек — порядок дифференцирования по $y$).

Тогда выполняются следующие неравенства

$$\left.\begin{aligned} &|F| < KR^{\nu-2} \\ &\left|\frac{dF}{dx}\right|, \ \left|\frac{dF}{dy}\right| < KR^{\nu-3} \\ &\left|\frac{d^2F}{dx^2}\right|, \ \left|\frac{d^2F}{dx\,dy}\right|, \ \left|\frac{d^2F}{dy^2}\right| < KR^{\nu-4} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (5, 3)$$

где $\frac{d}{dx}$ и $\frac{d}{dy}$ обозначают полные производные по соответствующим аргументам, например

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} p_1 + \frac{\partial F}{\partial p_1} p_{11} + \frac{\partial F}{\partial p_2} p_{21} + \frac{\partial F}{\partial p_{11}} p_{111} + \frac{\partial F}{\partial p_{12}} p_{112} + \frac{\partial F}{\partial p_{22}} p_{122}$$

$2^0$. Пусть даны две группы значений

$$x^{(1)}, y^{(1)}, u^{(1)}, \ldots \quad p^{(1)}_{2222} \quad x^{(2)}, y^{(2)}, u^{(2)}, \ldots \quad p^{(2)}_{2222},$$

удовлетворяющие неравенствам (5, 2), причем

$$x^{(1)2} + y^{(1)2} = R_1^2, \quad x^{(2)2} + y^{(2)2} = R_2^2,$$

$$d^2 = (x^{(1)} - x^{(2)})^2 + (y^{(1)} - y^{(2)})^2.$$

Обозначая через $R$ наименьшее из чисел $R_1$ и $R_2$, мы потребуем, чтобы при $d < R$

$$\left|\left[\frac{d^2F}{dx^2}\right]_1 - \left[\frac{d^2F}{dx^2}\right]_2\right| < K\left|R^{\nu-4}\left(\frac{d}{R}\right)^\lambda + \frac{|u^{(1)} - u^{(2)}|}{R^4} + \ldots\ldots +\right.$$

$$\left. + |p^{(1)}_{1111} - p^{(2)}_{1111}| + \ldots\ldots + |p^{(1)}_{2222} - p^{(2)}_{2222}|\right| \ldots (5,4)$$

$3^0$. Пусть

$$x^{(1)}, y^{(1)}, u^{(1)}, \ldots\ldots\ldots p^{(1)}_{2222}$$
$$x^{(1)}, y^{(1)}, \overline{u}^{(1)}, \ldots\ldots\ldots \overline{p}^{(1)}_{2222}$$
$$x^{(2)}, y^{(2)}, u^{(2)}, \ldots\ldots\ldots p^{(2)}_{2222}$$
$$x^{(2)}, y^{(2)}, \overline{u}^{(2)}, \ldots\ldots\ldots \overline{p}^{(2)}_{2222}$$

четыре группы значений, удовлетворяющих неравенствам (5, 2).

$$\Phi = \frac{d^2 F}{dx^2} - \frac{d^2 \overline{F}}{dx^2}, \ldots\ldots$$

$$\omega = \overline{u} - u, \quad \pi_{i_1 i_2} \ldots + \ldots = \overline{p}^1_{i_1} - p_{i_1} \ldots\ldots$$

Если

$$|\omega| < \Omega R^{\nu}, \quad |\pi_{i_1}| < \Omega R^{\nu-1}, \ldots\ldots |\pi_{i_1 i_2 i_3 i_3}| < \Omega R^{\nu-4},$$

то выполняется неравенство

$$|\Phi_2 - \Phi_1| < \left(\Omega R^{\nu-4}\left(\frac{d}{R}\right)^{\lambda} + \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{R^4} + \ldots\ldots + \right.$$
$$\left. + |\pi^{(1)}_{1111} - \pi^{(2)}_{1111}| + \ldots\ldots + |\pi^{(1)}_{2222} - \pi^{(2)}_{2222}|\right) \ldots\ldots (5, 5)$$

При этих ограничениях можно доказать, что при достаточно малых значениях параметра $\mu$ решение внешней задачи Neuman'a есть аналитическая функция $x$ и $y$.

Для того, чтобы это доказать надо возвратиться к последовательным приближениям $\varphi_n(x, y)$, рассмотренным в предыдущем параграфе. Комбинируя теорему II § 3 с ограничениями, наложенными на правую часть нашего уравнения, мы докажем последовательно, что каждое из приближений удовлетворяет неравенствам (3, 15) с одной и той же константой $C$. Кроме того на основании ограничения $3^0$ доказывается, что приближения так же, как их производные до четвертого порядка включительно, образуют равномерно сходящиеся последовательности функций, сходящиеся к решению уравнения (4, 1) и к его производным.

На основании этого заключаем, что решение нашей задачи $\varphi(x, y)$ будет непрерывная функция вместе со своими частными производными до четвертого порядка включительно. Принимая во внимание, что $F$ есть аналитическая функция всех своих аргументов и применяя теорему Леви, сформулированную в начале этого параграфа, заключаем, что $\varphi(x, y)$ есть аналитическая функция своих аргументов.

### 6. Задача об обтекании тела потоком сжимаемого газа

В § 1 мы уже упоминали, что задача определения потенциала скоростей потока сжимаемого газа, обтекающего заданный контур и имеющего вдали от крыла скорость $\overline{w}$, направленную по оси $x$, сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$\left[1-\frac{u^2}{a^{*2}}-\frac{k-1}{k+1}\frac{v^2}{a^{*2}}\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{4uv}{(k+1)a^{*2}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}+$$
$$+\left[1-\frac{v^2}{a^{*2}}-\frac{k-1}{k+1}\frac{u^2}{a^{*2}}\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6,1)$$

при указанных в § 1 обозначениях) при следующих граничных условиях:

1. На контуре крыла $\frac{\partial\Phi}{\partial n}=0$.
2. $\lim u=\overline{w}$, $\lim v=0$.
3. $u$ и $v$ всюду конечны и непрерывны.

Мы перейдем к отвлеченным скоростям

$$u'=\frac{u}{\overline{w}},\ v'=\frac{v}{\overline{w}},$$

и будем в дальнейшем для простоты вместо $u'$, $v'$ снова писать просто $u$, $v$. При этих обозначениях наше дифференциальное уравнение приводится к виду

$$\Delta\Phi=\mu\left\{\left[u^2+\frac{k-1}{k+1}v^2\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{4uv}{k+1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}+\right.$$
$$\left.+\left[v^2+\frac{k-1}{k+1}u^2\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6,2)$$

причем

$$\mu=\left(\frac{\overline{w}}{a^*}\right)^2$$

Второе из граничных условий также изменится, именно вместо $\overline{w}$ будет стоять 1.

Величина $\mu$, входящая в наше уравнение (6, 2) служит мерой сжимаемости газа и связана с обычно употребляющимся для этой цели числом Берстоу

$$\beta=\frac{\overline{w}}{\overline{a}}$$

($\overline{a}$ — скорость звука в бесконечности), по формуле

$$\mu=\frac{(k+1)\beta^2}{2+(k-1)\beta^2}.$$

Для определения потенциала $\Phi$, разобьем его на два слагаемых

$$\Phi = \varphi_0 + \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6, 3)$$

где $\varphi_0$ потенциал скоростей течения несжимаемой жидкости, обтекающей наше крыло при тех же условиях.

Для определения $\varphi$ получаем дифференциальное уравнение вида

$$\Delta\varphi = \mu\left\{\left[(p + p_0)^2 + \frac{k-1}{k+1}(q + q_0)^2\right](r + r_0) + \ldots\ldots\right\} \quad . \quad . \quad (6, 4)$$

$$p = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \ldots; p_0 = \frac{\partial\varphi^0}{\partial x}, \ldots$$

и граничные условия:

1) На контуре тела

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$$

2) Вдали от тела

$$\lim p = \lim q = 0.$$

Легко проверить, что правая часть (6,4) удовлетворяет условиям, наложенным на $F$ в § 4.

Применяя результат § 4, находим решение нашей задачи, подставляя в (6,4) ряд

$$\varphi = \Phi - \varphi_0 = \mu\varphi^{(1)} + \ldots + \mu^n\varphi^{(n)} + \ldots \quad (6,5)$$

причем все коэффициенты этого ряда $\varphi_n(x, y)$ находятся путем последовательного решения уравнения Пуассона.

Результат легко распространяется на случай задачи о построении потока с заданной циркуляцией. Решение находится точно так же, как и в уже рассмотренном случае, только за $\varphi_0(x, y)$ надо взять поток несжимаемой жидкости с заданной циркуляцией. Неоднозначность функции $\varphi_0(x, y)$ при этом не представляет никаких затруднений, так как в уравнение входят только производные функции $\varphi_0$, которые будут уже однозначными функциями $x$ и $y$.

Таким образом задача об обтекании гладкого контура потоком сжимаемого газа решается при достаточно малых значениях числа Берстоу.

Легко также проверить, что правая часть уравнения (6,4) удовлетворяет условиям, наложенным на функцию $F$ в § 5. Отсюда следует, что потенциал скорости потока сжимаемого газа есть аналитическая функция $x$ и $y$, при достаточно малых значениях числа Берстоу.

### 7. Случай крыла, имеющего одну острую кромку

Рассмотрим теперь задачу о обтекании сжимаемым газом крыла, имеющего одну острую кромку в точке $A$. Мы предположим, что крыло ограничено плавной аналитической кривой, имеющей только одну угловую точку $A$. Предположим далее, что в окрестности точки $A$ конформное отображение области $(D)$ на внешности круга имеет вид

$$z - z_0 = a\bar{z}^{2-\varepsilon}(1 + b\bar{z} + \ldots). \quad (7,1)$$

где $z = x + iy$ и $\bar{z} = \bar{x} + i\bar{y}$ — переменное на внешности круга, причем начало координат помещено в точке $\bar{A}$, соответствующей острой кромке $A$. $\varepsilon\pi$ есть угол, составляемый касательными к крылу в точке $A$. Мы предполагаем $0 \leqslant \varepsilon < 1$.

Положим снова

$$\Phi = \varphi_0 + \varphi$$

где $\varphi_0$ потенциал скоростей потока несжимаемого газа, удовлетворяющего всем граничным условиям задачи и обтекающего крыло со сходом струй в точке $A$.

Для определения функции $\varphi$, мы снова получаем уравнение вида (6,4). Нам надо определить функцию $\varphi$ так, чтобы в точке $A$ ее производные были конечны. Такая функция будет, вообще, говоря неоднозначна. Для определения $\varphi$ мы воспользуемся опять методом последовательных приближений. Для этого мы вводим неоднозначную функцию Грина $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ и полагаем

$$\varphi_n = \frac{1}{2\pi}\int\int_{(D)} \Gamma(x, y; \xi, \eta)\left\{\left[(p_{n-1} + p_0)^2 + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{k-1}{k+1}(q_{n-1} + q_0)^2\right](r_0 + r_{n-1}) + \ldots\right\} d\xi\, d\eta \quad (7,2)$$

Мы докажем, что $\varphi_n(x, y)$ сходятся к решению рассматриваемой задачи. Для этого отобразим конформно область $(D)$ на внешность круга $|\bar{z}| > 1$. При этом соотношение (7,2) перейдет в следующее:

$$\varphi_n = \frac{\mu}{2\pi}\int\int \Gamma(\bar{x}, \bar{y}; \bar{\xi}, \bar{\eta})\left\{\left[(p_{n-1} + p_0)^2 + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{k-1}{k+1}(q_0 + q_{n-1})^2\right](r_{n-1} + r_0) + \ldots\right\} \left|\frac{d\zeta}{d\bar{\zeta}}\right|^2 d\xi\, d\eta \quad (7,3)$$

где $\zeta = \xi + i\eta$, $\bar{\zeta} = \bar{\xi} + i\bar{\eta}$.

Положим

$$\overline{F}=\left\{\left[(p+p_0)^2+\frac{k-1}{k+1}(q+q_0)^2\right](r+r_0)+\ldots\right\}\left|\frac{dz}{d\bar{z}}\right|^2. \quad (7,4)$$

причем мы подразумеваем, что $p$, $q$, $r$, ... заменены выражениями через производные по аргументам $\bar{x}$, $\bar{y}$.

Функция $\overline{F}$, рассматриваемая как функция аргументов $\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{s}, \bar{t}$, вне окрестности точки $\overline{A}$, удовлетворяет условиям вида (4,3), (4,4) и (4,6). В окрестности точки $\overline{A}$ эти неравенства заменятся следующими:

1°. Пусть $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ функция, определенная во внешности круга и удовлетворяющая двум следующим требованиям:

a) В окрестности точки $\overline{A}$

$$\left.\begin{aligned} &|\varphi|,\ \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}\right|,\ \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{y}}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{x}^2}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{x}\,\partial\bar{y}}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{y}^2}\right| < C \\ &\text{и при } d<\overline{R}\ (\overline{R}=\overline{A}\overline{P}) \\ &\left|\delta\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{x}^2}\right|,\ \left|\delta\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{x}\,\partial\bar{y}}\right|,\ \left|\delta\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{y}^2}\right| < C\left(\frac{d}{\overline{R}}\right)^{\lambda} \end{aligned}\right\} \quad (7,5)$$

b) В точке $\overline{A}$

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}\right|=\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{y}}\right|=0$$

тогда в той же окрестности точки $\overline{A}$ функция $\overline{H}$, полученная подстановкой в $\overline{F}$ функции $\varphi$ и ее производных удовлетворяет условиям

$$\left.\begin{aligned} &|\overline{H}|<K\overline{R}^{2\varepsilon} \\ &\text{и при } d<\overline{R} \\ &|\overline{H}_1-\overline{H}_2|<K\overline{R}^{2\varepsilon}\left(\frac{d}{\overline{R}}\right)^{\lambda} \end{aligned}\right\} \quad (7,7)$$

причем константа $K$ зависит только от $C$, $\overline{R}=\overline{A}\overline{P}$.

2°. Пусть $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ и $\varphi'(\bar{x}, \bar{y})$ две функции, удовлетворяющие условиям a), b) и неравенствам

$$\text{c)}\quad |\bar{u}'-\bar{u}|,\ |\bar{p}'-\bar{p}|,\ \ldots |\bar{t}'-\bar{t}|<\Omega \quad (7,8)$$

тогда

$$\left.\begin{aligned} &|\overline{H}-\overline{H}'|<K\Omega\overline{R}^{2\varepsilon} \\ &|\overline{H}_2'-\overline{H}_2-\overline{H}_1'+\overline{H}_1|<K\Omega\overline{R}^{2\varepsilon}\left(\frac{d}{\overline{R}}\right)^{\lambda} \end{aligned}\right\} \quad (7,9)$$

константа $K$ зависит только от $C$.

Докажем неравенства (7,7). В окрестности точки $\overline{A}$

$$\overline{p} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \overline{p}\frac{\partial \overline{x}}{\partial x} + \overline{q}\frac{\partial \overline{y}}{\partial y} = (\overline{x}\overline{r}^* + \overline{y}\overline{s}^*)\frac{\partial \overline{x}}{\partial x} + (\overline{x}\overline{s}^* + \overline{y}\overline{t}^*)\frac{\partial \overline{y}}{\partial x}$$

из разложения (7,1) немедленно получаем

$$\left|\overline{x}\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\right|, \quad \left|\overline{y}\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\right|, \quad \left|\overline{x}\frac{\partial \overline{y}}{\partial x}\right|, \quad \left|\overline{y}\frac{\partial \overline{y}}{\partial x}\right| < A|\overline{z}|^{2\varepsilon}$$

откуда следует, что в окрестности точки $\overline{A}$

$$|p|, \ |q| < AC|\overline{z}|^{\varepsilon}.$$

Рассмотрим теперь еще выражение $r\left|\frac{dz}{d\overline{z}}\right|^2$

$$|r|\left|\frac{dz}{d\overline{z}}\right| = \left|\overline{r}\left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\right)^2 + 2\overline{s}\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\frac{\partial \overline{y}}{\partial x} + \overline{t}\left(\frac{\partial \overline{y}}{\partial x}\right)^2 + \overline{p}\frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial x^2} + \overline{q}\frac{\partial^2 \overline{y}}{\partial x^2}\right|$$

пользуясь разложением (7,1), легко показать, что

$$\left|\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial \overline{z}}\right|, \quad \left|\frac{\partial \overline{y}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial \overline{z}}\right| < A$$

$$\left|\overline{x}\frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial x^2}\right|\left|\frac{dz}{dz}\right|^2, \quad \left|\overline{y}\frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial x^2}\right|\left|\frac{dz}{d\overline{z}}\right|, \quad \ldots < A$$

откуда

$$\left|\overline{p}\frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial x^2}\right|\left|\frac{dz}{d\overline{z}}\right|^2 = |\overline{x}\overline{r}^* + \overline{y}\overline{s}^*|\left|\frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial x^2}\right|\left|\frac{dz}{d\overline{z}}\right|^2 < AC$$

и потому

$$|r|\left|\frac{dz}{d\overline{z}}\right|^2 < AC$$

аналогично покажем, что

$$|r_0|\left|\frac{dz}{d\overline{z}}\right|^2 < A.$$

Легко также показать, что в окрестности точки $\overline{A}$

$$|p_0| < A|\overline{z}|^{\varepsilon}$$

На основании изложенного типичный член выражения $\overline{F}$ вблизи точки $A$ оценивается следующим образом

$$|(p + p_0)|^2(r_0 + r)\left|\frac{dz}{d\overline{z}}\right|^2 < A(1 + C)^3|\overline{z}|^{2\varepsilon},$$

таким образом первое из неравенств (7,7) доказано. Займемся теперь вторым неравенством (7,7). Пусть $P_1$, $P_2$ две точки, находящиеся в окрестности $\overline{A}$ и $P_1P_2 = d$.

$$\left[(p+p_0)^2(r+r_0)\left|\frac{dz}{d\bar{z}}\right|^2\right]_1 - \left[(p+p_0)^2(r+r_0)\left|\frac{dz}{d\bar{z}}\right|^2\right]_2 =$$
$$= \left[(r+r_0)\left|\frac{dz}{d\bar{z}}\right|^2\right]_1 \delta(p+p_0) + \left[(p_0+p)^2\right]_2 \delta(r+r_0)\left|\frac{dz}{d\bar{z}}\right|^2.$$

Рассмотрим первое слагаемое. Множитель, стоящий перед знаком разности, как было показано выше, ограничен и не превосходит $A(C+1)$, а разность $\delta(p_0+p)^2$ может быть представлена в виде

$$[(p_0+p)_1 + (p_0+p)_2]\,\delta(p_0+p).$$

Выражение, стоящее в скобке, не превосходит $A(C+1)\overline{R}^{\varepsilon}$, где $\overline{R}$ расстояние до одной из точек $P_1$, $P_2$. Так как

$$p_0 + p = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x}(\bar{p}_0 + \bar{p}) + \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(\bar{q}_0 + \bar{q})$$

мы ограничимся рассмотрением разности

$$\delta\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\bar{p} = \left[\frac{\partial \bar{x}}{\partial c}\right]_1 \delta\bar{p} + p_2\,\delta\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}$$

Из (7,1) следует

$$\left|\delta\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right| < A\frac{d}{\overline{R}^{2-\varepsilon}} < A\overline{R}^{\varepsilon-1}\left(\frac{d}{\overline{R}}\right)^{\lambda}$$

и

$$|p_2| < AC\overline{R}$$

и следовательно второе слагаемое не больше, чем

$$A(C+1)\overline{R}^{\varepsilon}\left(\frac{d}{\overline{R}}\right)^{\lambda}.$$

Оценим теперь первое слагаемое

$$\left|\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right| < A\overline{R}^{\varepsilon-1}$$

ко второму множителю применяем теорему о среднем, тогда

$$\delta\bar{p} = \bar{p}_2 - \bar{p}_1 =$$
$$= \vartheta\{\bar{x}_2\,\bar{r}\,(\vartheta\bar{x}_2, \vartheta\bar{y}_2) - \bar{x}_1\,r\,(\vartheta\bar{x}_1, \vartheta\bar{y}_1) + \bar{y}_2\,\bar{s}\,(\vartheta\bar{x}_2, \vartheta\bar{y}_2) - \bar{y}_1\,\bar{s}\,(\vartheta\bar{x}_1, \vartheta\bar{y}_1)\}$$

отсюда и из предположения (7,5) немедленно следует

$$|\delta\bar{p}| < A[C+1]\overline{R}^{\varepsilon}\left(\frac{d}{\overline{R}}\right)^{\lambda}.$$

Принимая это во внимание, получаем

$$\left|\frac{\partial\bar{x}}{\partial x}\delta\bar{p}\right| < A(C+1)\overline{R}^{\varepsilon}\left(\frac{d}{\overline{R}}\right)^{\lambda}$$

и следовательно

$$\delta(p_0+p)^2 < A(C+1)\overline{R}^{2\varepsilon}\left(\frac{\delta}{\overline{R}}\right)^{\lambda}.$$

Оценивая таким же образом остальные слагаемые, без труда находим второе из неравенств (7,7) с константой $K=A(C+1)^3$, где $A$ зависит только от формы области и от показателей Hölder'a.

Аналогичным образом докажем неравенства (7,8). На основании этих неравенств легко доказать, что последовательные приближения (7,3) сходятся к решению задачи. Доказательство сводится к повторению рассуждений, приведенных при доказательстве сходимости приближений в § 4.

Только в этом случае надо отдельно провести доказательство для точек, лежащих вне окрестности точки $\overline{A}$ и отдельно для окрестности точки. В первом случае рассуждения § 4 всецело воспроизводятся; во втором случае надо вместо неравенств (4,8) пользоваться неравенствами (7,5) и условия 1°, 2° и 3° заменить неравенствами (7,7) и (7,9).

Таким образом, в случае, когда обтекаемое тело имеет острую кромку, мы снова приходим к такому правилу для отыскания потенциала скоростей.

В уравнении (6,2) подставляем ряд

$$\Phi = \varphi_0 + \mu\varphi^{(1)} + \ldots + \mu^n\varphi^{(n)} + \ldots$$

где $\varphi_0$ потенциал потока несжимаемой жидкости, обтекающей наше крыло. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\mu$, получаем для $\varphi_n$ уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi^{(n)} = H^{(n)}$$

где $H$ зависит от $n$ первых коэффициентов ряда. Это уравнение Пуассона решается по формуле

$$\varphi^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int\int_{(D)} \Gamma(x, y; \xi, \eta) H^{(n)} d\xi d\eta$$

полученный ряд будет равномерно сходиться к решению при всех достаточно малых значениях $\mu$.

Найденный таким образом поток будет удовлетворять всем условиям задачи, и в частности точка схода струй будет совпадать с острием крыла.

Для достаточно малых $\mu$ функция $\varphi(x, y)$ будет аналитической функцией $x, y$. Это доказывается снова на основании теоремы Леви и на основании теоремы IV § 3. Доказательство совершенно аналогично с доказательством предыдущих теорем. В этом случае вблизи точки $\overline{A}$ надо снова установить соответствующие неравенства для $F$ и дальше доказательство получается непосредственно. Подробности этого доказательства мы опустим.

### 8. Теорема Жуковского для сжимаемых газов

В настоящем параграфе мы даем строгий вывод теоремы Жуковского для случая сжимаемых газов: подъемная сила крыла дается формулой

$$R_y = -\bar{\rho}\bar{w}\Gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8,1)$$

где $\bar{\rho}$ и $\bar{w}$ плотность и полная скорость потока вдали от крыла, а

$$\Gamma = \int u\,dx + v\,dy$$

циркуляция по контуру, окружающему крыло.

Применяя теорему импульсов, имеем

$$R_y = \int_C p\,dx + \int_C \rho v(v\,dx - u\,dy)$$

$$R_x = -\int_C p\,dx + \int_C \rho u(v\,dx - u\,dy)$$

где $C$ некоторый контур, окружающий наше крыло.

Мы воспользуемся следующими формулами, дающими плотность и давление в сжимаемом газе

$$\rho = \rho_0\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{w^2}{a^{*2}}\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8,2)$$

$$p = p_0\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{w^2}{a^{*2}}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8,3)$$

Рассмотрим вторые слагаемые выражений для $R_x$ и $R_y$. Положим

$$u = \bar{w} + u', \quad v = v', \quad \rho = \bar{\rho} + \rho'$$

тогда из сделанных выше оценок для потенциала (4,8) непосредственно следует

$$u' = O(R^{\nu-1}),\quad v' = O(R^{\nu-1}),\quad \rho' = O(R^{\nu-1}) \qquad (8,4)$$

где $R$ расстояние от начала координат. Если контур есть круг радиуса $R$, то

$$\int_{(C)} \rho v\,(v\,dx - u\,dy) = -\bar{\rho}\bar{w}\int_{(C)} v\,dx - \int_{(C)} [\rho'\bar{w} + \bar{\rho}u' + u'\rho']\,v\,dy =$$

$$= -\bar{\rho}\bar{w}\int_{(C)} v\,dy + O(R^{2\nu-1})$$

$$\int_{(C)} \rho u\,(v\,dx - u\,dy) = \int_{(C)} \rho u'\,(v\,dx - u\,dy) + \bar{w}\int_{(C)} \rho\,(v\,dx - u\,dy),$$

так как течение — установившееся, второй интеграл обращается в нуль, а первый интеграл может быть записан в виде

$$\int_{(C)} \rho u'\,(v\,dx - u\,dy) = -\bar{\rho}\bar{w}\int_{(C)} u'\,dy\,O(R^{2\nu-1}).$$

Рассмотрим теперь интегралы давления

$$\int_{(C)} p\,dx = p_0\int_{(C)}\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{\bar{w}^2}{a^{*2}} - \frac{k-1}{k+1}\frac{2\bar{w}u' + u'^2 + v'^2}{a^{*2}}\right)^{\frac{k}{k-1}} dx =$$

$$= p_0\int_{(C)}\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{\bar{w}^2}{a^{*2}}\right)^{\frac{k}{k-1}}\left(1 - \frac{k}{k-1}\frac{2\bar{w}u' + u'^2 + v'^2}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{\bar{w}^2}{a^{*2}}\right)a^{*2}} + O(R^{2\nu-1})\right)dx =$$

$$= -\frac{2k\bar{w}}{(k+1)a^{*2}}p_0\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{\bar{w}^2}{a^{*2}}\right)^{\frac{1}{k-1}}\int_{(C)} u'\,dx + O(R^{2\nu-1}).$$

Из (8,2), принимая во внимание, что

$$a^{*2} = \frac{2k}{k+1}\frac{p_0}{\rho_0}$$

получаем

$$\int_{(C)} p\,dx = -\bar{\rho}\bar{w}\int_{(C)} u'\,dx + O(R^{2\nu-1}) = -\bar{\rho}\bar{w}\int_{(C)} u\,dx + O(R^{2\nu-1})$$

подставляя в формулу для $R_y$ и переходя к пределу при $R\to\infty$, получаем теорему Жуковского (8,1). Аналогичным путем

$$\int_{(C)} p\,dy = -\bar{\rho}\bar{w}\int_{(C)} u'\,dy + O(R^{2\nu-1}).$$

Подставляя в формулу для $R_x$ и переходя к пределу при $R \to \infty$ получим

$$R_x = 0.$$

Центральный
аэро-гидродинамический
институт

## F. FRANKL und M. KELDYSCH: DIE ÄUSSERE NEUMANN'SCHE AUFGABE FÜR NICHTLINEARE ELLIPTISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT ANWENDUNG AUF DIE THEORIE DES FLÜGELS IM KOMPRESSIBLEN GAS

### ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit wird eine strenge Theorie des Tragflügels in zweidimensionaler Strömung eines kompressiblen Gases gegeben. Der Geltungsbereich dieser Theorie ist durch die Bedingung bestimmt, dass die Bairstow'sche Zahl, d. h. das Verhältnis der Geschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit in grosser Entfernung vom Flügel — genügend klein ist. Die bisherigen Theorien (die von Prandtl[1]) und Glauert[2]), sowie die von P. A. Walter im Mai 1932 auf der Moskauer Konferenz für Mechanik dargelegte[3]), durch welche unsere Arbeit angeregt wurde) sind Näherungstheorien ohne Konvergenzbeweis. Die Differentialgleichung des Geschwindigkeitspotentials hat folgende Form:

$$\Delta\Phi = \mu\left\{\left(u^2 + \frac{k-1}{k+1}v^2\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{4uv}{k+1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} + \left(v^2 + \frac{k-1}{k+1}u^2\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right\}$$

wobei $\Phi$ das Geschwindigkeitspotential, $u = \frac{\partial\Phi}{\partial x}$ und $v = \frac{\partial\Phi}{\partial y}$ die Komponenten der Geschwindigkeit, $k = \frac{c_p}{c_v}$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen ($= 1.4$ für die Luft) und $\mu$ ein Parameter ist, der von der Bairstow'schen Zahl abhängt, und zwar das Quadrat des Verhältnisses der Geschwindigkeit im Unendlichen zur kritischen Geschwindigkeit.

Der Masstab ist dabei so gewählt, dass die Geschwindigkeit im Unendlichen gleich Eins wird.

Zur Lösung der Aufgabe setzen wir:

$$\Phi = \varphi_0 + \varphi$$

[1]) Handbuch der Experimentalphysik, Bd. IV, 1. Teil, S. 410.

[2]) R. & M., 1135.

[3]) In den «Izvestija Akademii Nauk SSSR» (Mitteilungen der Akademie der Wissenschaften der UdSSR), 1934, № 1, S. 75, erschienen.

wobei das Potential der entsprechenden Strömung in der inkompressiblen Flüssigkeit ist. Unsere Differentialgleichung nimmt dann folgende Formen an:

$$\Delta\varphi = \mu\left\{\left[(p_0+p)^2+\frac{k-1}{k+1}(q_0+q)^2\right](r_0+r)+\frac{4(p_0+p)(q_0+q)}{k+1}(s_0+s)+\right.$$
$$\left.+\left[(q_0+q)^2+\frac{k-1}{k+1}(p_0+p)^2\right](t_0+t)\right\} \quad (*)$$

wobei $p_0=\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}$, $q_0=\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}$, $r_0=\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}$, $s_0=\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\,\partial y}$, $t_0=\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}$

$$p=\frac{\partial\varphi}{\partial x}, q=\frac{\partial\varphi}{\partial y}, r=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, s=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}, t=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}.$$

Die Randbedingungen sind dabei folgende:

1. Die Normalkomponente der Zusatzgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dn}$ an der Flügeloberfläche ist gleich Null.

2. Die Geschwindigkeit bleibt an der Hinterkante endlich.

3. Die Zusatzgeschwindigkeit geht im Unendlichen gegen Null.

Für genügend kleines $\mu$ ist die Differentialgleichung (*) elliptisch.

Für derartige Gleichungen wurde von einer Reihe von Autoren, die innere Dirichlet'sche Aufgabe gelöst. Wir schliessen uns an die Lösung von Lichtenstein [1]) an. Diese besteht in der Zurückführung der Aufgabe auf eine Integro-Differentialgleichung, die mit Hilfe sukzessiver Approximationen gelöst wird.

Die Methode von Lichtenstein lässt sich im grossen und ganzen auf unseren Fall übertragen, jedoch tritt als neue Schwierigkeit die Frage des Verhaltens der Lösung im Unendlichen auf. Es ist notwendig, die Ordnung des Verschwindens der Geschwindigkeitskomponenten und ihrer Ableitungen im Unendlichen so zu bestimmen, dass sie sich bei den sukzessiven Approximationen reproduziert.

Ein ähnliches Problem hat Lichtenstein in seiner Arbeit «Über einen Einwand gegen das Newton'sche Gravitationsgesetz» [2]) gelöst, doch lässt sich sein diesbezügliches Resultat nicht direkt übertragen. Unsere Bedingungen für das Verhalten im Unendlichen sind die folgenden:

$$|p|, |q| = 0\ (R^{\nu-1})$$
$$|n|, |s|, |t| = 0\ (R^{\nu-2}) \quad (**)$$
$$|r_1-r_2|, |s_1-s_2|, |t_1-t_2| = 0\ (R^{\nu-2})\left(\frac{d}{R}\right)^{\lambda}$$

wobei $R$ der Abstand des betrachteten Punktes vom Koordinatenursprung und $d$ der Abstand zwischen zwei Punkten $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ ist (in der dritten Bedingung ist für $R$ der Abstand desjenigen Punktes vom Ursprung zu nehmen, der dem Ursprung näher liegt). Die Zahlen $\lambda$ und $\nu$ sind beliebige Zahlen, die zwischen 0 und 1 liegen $(0<\lambda, \nu<1)$.

[1]) Lichtenstein. Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen, S. 88.

[2]) Math. Ztschr., Bd. 27, S. 607. Siehe auch «Grundlagen der Hydromechanik», S. 441.

Wir unterstreichen, dass sich nicht beweisen lässt, dass die Zusatzgeschwindigkeit wie $R^{-1}$ gegen Null geht, sondern nur wie $R^{\nu-1}$. Daraus ergibt sich, dass der Glauert'sche Beweis des Kutta-Joukowskischen Auftriebsatzes [1]) (Auftrieb = Dichte im Unendlichen × Geschwindigkeit im Unendlichen × Zirkulation) ungenügend ist, da Glauert die Ordnung des Verschwindens als $R^{-1}$ annimmt.

Wir zeigen aber, dass die Ordnung $R^{\nu-1}$ zum Beweis des Satzes von Kutta-Joukowski ausreicht.

Eine ähnliche Schwierigkeit, wie im Unendlichen tritt auch an der Hinterkante auf, da hier das Potential eine Singularitätsstelle hat. Auch diese Schwierigkeit wird durch «Hölder-Bedingungen» gelöst, die den Bedingungen (**) ähnlich sind und in denen der Abstand von der Hinterkante auftritt.

Dieser Abstand ist dabei mit einem Exponenten versehen, der vom Kantenwinkel abhängt. Wir gehen aus Raummangel hier auf ihre genaue Formulierung nicht ein.

Eine weitere Neuerung gegenüber bisher gelösten ähnlichen Problemen besteht darin, dass die Funktion $\varphi$ nicht eindeutig, sondern wegen des Vorhandenseins einer von der Bairstow'schen Zahl abhängigen Zirkulation unendlich vieldeutig ist. Dieser Umstand führt aber auf keine besonderen Schwierigkeiten.

Schliesslich beweisen wir noch, dass $\varphi$ eine analytische Funktion von $x$ und $y$ ist.

Nach einem Satz von Lewy [2]) genügt es dazu, zu zeigen, dass $\varphi$ stetige Ableitungen bis zur vierten Ordnung einschliesslich besitzt. Dies lässt sich aber mit Hilfe einer Verschärfung der Bedingungen (**) beweisen.

Weiters lässt sich leicht beweisen, dass $\varphi$ eine analytische Funktion des Parameters $\mu$ ist.

Daraus ergibt sich, dass man $\Phi$ in eine Potenzreihe nach $\mu$ entwickeln kann:

$$\Phi = \varphi^{(0)} + \mu\varphi^{(1)} + \cdots + \mu^n \varphi^{(n)} + \cdots$$

wobei die Funktionen $\varphi^{(n)}$ $(x\ y)$ nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten bestimmt werden können.

Unsere Arbeit lässt jedoch ein sehr wichtiges Problem ungelösst, nämlich die Frage, bis zu welchen Werten von $\mu$ sich $\Phi$, als analytische Funktion von $\mu$ betrachtet, analytisch fortsetzen lässt. Experimentelle Untersuchungen von Taylor [3]) sprechen dafür, dass dies der Fall ist, solange die Geschwindigkeit überall kleiner als die Schallgeschwindigkeit bleibt. Eine Arbeit von Braun [4]) macht wahrscheinlich, dass man noch eine gewisse Strecke über diese Grenze hinausgehen kann.

---

[1]) R. & M., 1135.

[2]) Math. Annalen, Bd. 101, S. 609.

[3]) Verhandlungen des III. Intern. Kongresses f. techn. Mechanik, 1. Teil, S. 263.

[4]) Annalen der Physik, Bd. 15, H. 6.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

# ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОМ ВЫДЕЛЕНИИ МЕТАЛЛА НА ИНДИФЕРЕНТНОМ ЭЛЕКТРОДЕ

А. Г. САМАРЦЕВА и К. С. ЕВСТРОПЬЕВА

(*Представлено академиком* И. В. Гребенщиковым)

## Введение

В работе Леблана (Le Blanc)[1] (1909) было показано на примере выделения меди на платиновом электроде существование своеобразной поляризации. Платиновый катод, до момента образования на нем первых зародышей выделяемого металла, принимал менее благородный потенциал, чем потенциал устойчивого выделения этого металла. При дальнейшем ходе электролиза, когда на электроде уже появлялось некоторое количество металла, эта поляризация исчезала. На осциллограммах Леблана, дающих ход потенциала электрода во времени, наблюдается для области образования зародышей минимум глубиною в 23 mV, при плотности тока около 2 mA/*см*$^2$. По утверждению автора работы, отчетливый минимум получался не во всех опытах, но во многих случаях он проявлялся с несомненностью.

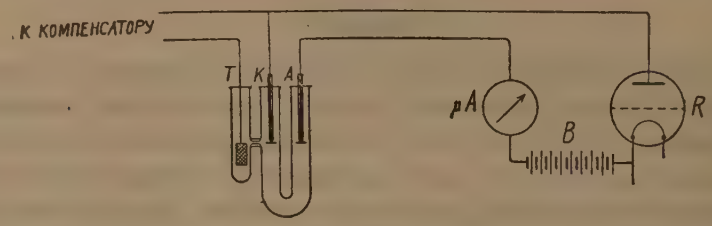
В последнее время это явление изучалось Эрдей-Грузом и Фольмером (Erdey-Grúz u. Volmer)[2] при электролитическом выделении Cd, Pb, Bi, Cu и Ag из растворов их солей на платине, тантале, золоте и углероде; и далее Эрдей-Грузом и Виком (Erdey-Grúz u. Wick)[3] — при выделении ртути из раствора ацетата ртути на «Glanzkohlenstoff». Эти авторы при изучении описываемого явления пользовались методом $iV$-кривых (Stromspannungskurve). При электролитическом выделении металла на индиферентном электроде наблюдалось нарушение нормального хода кривой $iV$ в области начала образования новой металлической фазы. Однако отступления от нормального хода не давали воспроизводимых результатов и не могли

[1] Abhandlungen d. Deutschen Bunsen-Gesellschaft, № 3, см. стр. 76—77.
[2] Ztschr. f. phys. Ch. 157 (A), 182, 1931.
[3] Ztschr. f. phys. Ch. 162 (A), 63, 1932.

служить для количественного изучения явления. Основную причину плохой воспроизводимости в этих опытах следует искать в том, что, по крайней мере в области начала выделения металла на индиферентном электроде, не существует предполагаемого методом $iV$-кривых равновесия между плотностью тока и потенциалом электрода. После образования первых зародышей выделяемого металла потенциал электрода начинает самопроизвольно изменяться, даже если плотность тока поддерживается постоянной.

### Метод и аппаратура

Для изучения описываемого явления мы пользовались следующим методом: при вполне определенной плотности тока, которая в течение всего




**Фиг. 1.** Измерительная схема. $A$ — анод электролитической ячейки; $K$ — катод; $T$ — электрод сравнения; $R$ — катодная лампа; $_{\mu}A$ — микроамперметр. В целях получения постоянства тока во время всего опыта на электролитическую ячейку подается ток насыщения лампы $R$.

опыта оставалась строго постоянной, наблюдалась скорость поляризации индиферентного электрода, на котором желали высадить исследуемый металл. До начала выделения металла потенциал электрода, в зависимости от заданной плотности тока, более или менее быстро понижался. По достижении некоторого значения, более низкого чем потенциал устойчивого выделения металла, наблюдался обратный ход. Обратному ходу потенциала соответствует образование и рост зародышей выделяемого металла. Дальнейший электролиз протекает уже при постоянном потенциале. Весь опыт, в зависимости от выбора объекта и условий электролиза, длился от нескольких минут до нескольких часов, так что не было необходимости снимать кривую изменения потенциала во времени осциллографически. Измерения производились при помощи прецизионного компенсатора Hartmann u. Braun, обычно с точностью до 0.1 mV.

На фиг. 1 схематически представлена измерительная схема. Путем использования тока насыщения катодной лампы $R$, достигалось строгое

постоянство плотности тока на изучаемом электроде во время всего опыта. Измерение тока в цепи производилось с помощью микроамперметра μA (отгалиброванный чувствительный гальванометр). На деле сила тока по микроамперметру устанавливалась[1] в побочной цепи с сопротивлением, после чего ток переключался на ячейку и в этот момент пускался секундомер. Далее отмечалось время прохождения потенциала через заданные значения. После одного ориентировочного опыта удавалось снимать до 6—7 точек в минуту с указанной точностью.

Фиг. 2. Электролитическая ячейка.

Большая часть измерений проведена с гладкими платиновыми электродами, выполненными в виде плоских проволочных спиралек. Плотность тока во всех случаях рассчитывалась из видимой поверхности электрода.

На фиг. 2 представлена фотография сосудика, служившего в качестве электролитической ячейки. Изучаемый электрод помещался в колено $K$ против капилляра, ведущего к электроду сравнения. В качестве электрода сравнения служил или электрод из выделяемого металла в том же растворе, или, чаще, насыщенный каломельный электрод. Перед опытом в течение нескольких часов через собранную ячейку с установленными электродами пропускался азот, очищенный от кислорода. Незадолго до начала измерений доступ азота прекращался.

Основная часть опытов относится к температуре 20°.

## Экспериментальные результаты

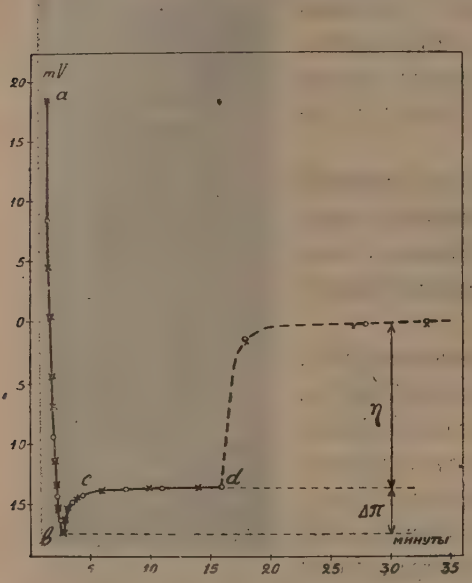
На фиг. 3 представлен ход потенциала во времени для платинового электрода в растворе $CdSO^4$ 1n концентрации при плотности тока[2] около $1.3 \cdot 10^{-5}$ А/см. Потенциал электрода в момент включения тока[2] 1.087 V.

От момента включения тока потенциал платинового электрода быстро падает; достигает значения на $\Delta\pi$ более низкого, чем потенциал устойчивого

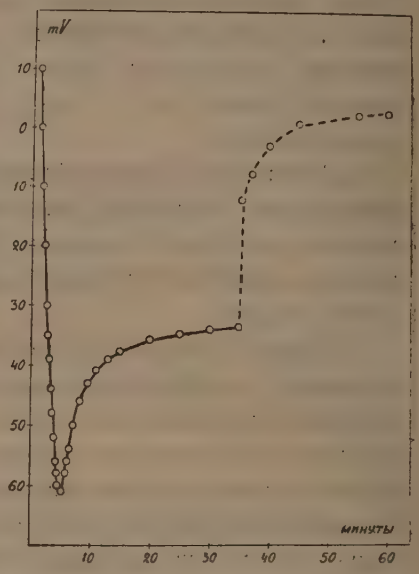
[1] Изменением тока накала лампы.

[2] Потенциал равновесия выделяемого металла в данном растворе условно принимается равным нулю.

выделения кадмия, и далее, после внезапного подъема, подходит к значению этого последнего. Если теперь ток выключить (пунктирная часть кривой), наблюдается подъем до потенциала равновесия кадмия в данном растворе. На рисунке (фиг. 3) приведены результаты двух независимых опытов для одинаковых условий электролиза.




Фиг. 3. Кривая поляризации гладкого платинового электрода в растворе $CdSO_4$ 1 n; $i = 1.3 \cdot 10^{-5}$ А/см²; $\Delta\pi$ — перенапряжение перед началом образования зародышей Cd на электроде; $\eta$ — поляризация выделения.

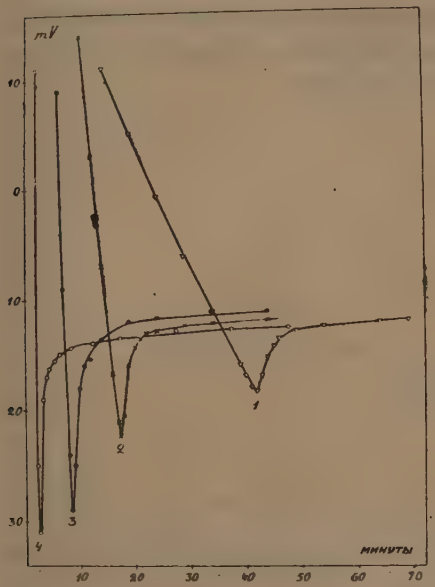



Фиг. 4. Поляризация гладкого Pt-электрода в растворе $AgNO_3$ в пиридине.

Совершенно аналогичный ход поляризации индиферентного электрода наблюдался авторами при электролитическом выделении Ag, Cu, Pb и Hg из водных растворов их солей, а для Ag также из раствора $AgNO_3$ в пиридине. На фиг. 4 представлена поляризация платинового электрода для этого последнего случая. Несомненно, что существование перенапряжения, связанного с образованием новой фазы на электроде, оказывается общим явлением. Хорошую воспроизводимость измерений, как это представлено на фиг. 3, удается получать не во всех случаях. Так, например, при нейтрализации двухвалентных ионов, могущих переходить в одновалентные, явление протекает не так гладко, хотя во всех случаях, перед установившимся выделением металла, наблюдается более или менее значительное перенапряжение.

На объектах, дающих хорошую воспроизводимость измерений, изучалось влияние на $\Delta\pi$ плотности тока, коэффициента внутреннего трения раствора, температуры и концентрации раствора. Ниже приводятся результаты произведенных измерений.

Плотность тока и $\Delta\pi$. Перенапряжение $\Delta\pi$ авторы склонны считать связанным с явлениями пересыщения некоторой промежуточной фазы между ионным состоянием металла в растворе и кристаллическим на электроде.[1] С этой точки зрения можно ожидать больших значений $\Delta\pi$ при больших плотностях тока. Опытные данные показывают,




Фиг. 5. Поляризация Pt-электрода (слабоплатинированного) и растворе $AgNO_3$ 1 n при разных плотностях тока.
$i_1 = 1.10^{-6}$ $i_3 = 20.10^{-6}$
$i_2 = 5.10^{-6}$ $i_4 = 60.10^{-6}$.

Фиг. 6. Область образования зародышей серебра на Pt-электроде. Отношение плотностей тока для кривых 1 : 60.

что такая связь существует. На фиг. 5 приводятся результаты измерений хода потенциала слабоплатинированного платинового электрода в растворе $AgNO_3$ 1n. Концентрации при плотностях тока $1.10^{-6}$, $5.10^{-6}$, $20.10^{-6}$, $60.10^{-6}$ А/см². Чем быстрее протекает поляризация электрода (больше плотность тока), тем глубже минимум перед потенциалом устойчивого выделения металла.

Замечательно, что промежуток времени, в течение которого электрод приобретает устойчивый потенциал, если производить отсчеты от момента

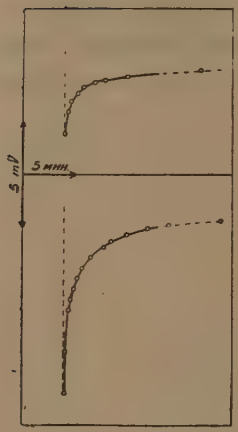
[1] Подробнее это будет рассмотрено при обсуждении результатов измерений.

достижения минимума, остается приблизительно постоянным при разных плотностях тока. На фиг. 6 сопоставлены две кривые для случаев выделения серебра на платиновом электроде. Отношение плотностей тока для этих кривых 1 : 60. На фиг. 7 — то же для ртути при отношении плотностей тока 1 : 50.

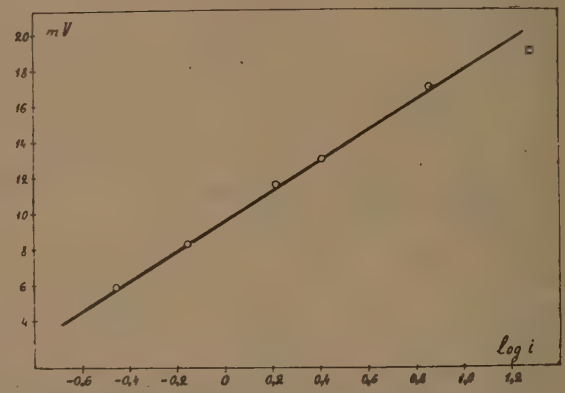
$\Delta\pi$ и плотность тока эмпирически могут быть связаны соотношением

$$\Delta\pi = a + b \lg i.$$

Экспериментальные точки на кривой фиг. 8 в пределах погрешностей измерений укладываются на логарифмику.




Фиг. 7. Область образования зародышей ртути на Pt-электроде. Отношение плотностей тока для кривых 1 : 50.

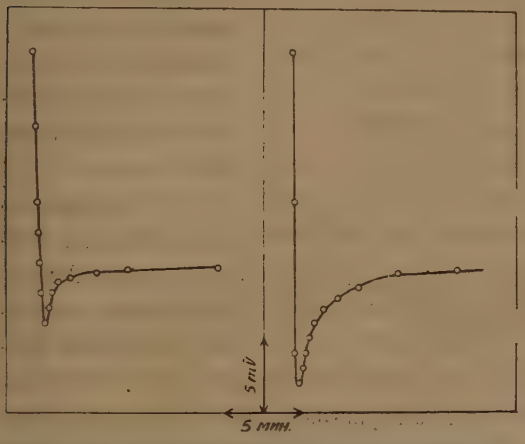



Фиг. 8. Зависимость между перенапряжением $\Delta\pi$ и плотностью тока.

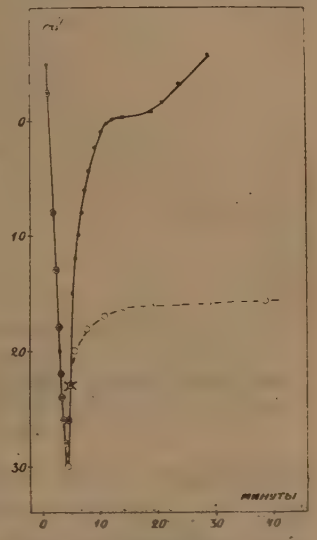
Температура, концентрация и $\Delta\pi$. Изучение поляризации платинового электрода в растворах $AgNO_3$ в температурном интервале 20—60° и в интервале концентрации 1n—0.01n показало, что ход кривой не претерпевает заметных изменений от перемены концентрации или температуры раствора, сохраняется при этом и глубина минимума. Конечно, в соответствии с произведенным изменением, наблюдается смещение абсолютных значений потенциалов.

Вязкость раствора и $\Delta\pi$. Если $\Delta\pi$ зависит от явлений пересыщения промежуточной фазы и последняя принадлежит не электроду, а раствору, следует ожидать в очень вязких растворах торможения как процесса образования зародышей, так и скорости роста зародышей. Технически трудно осуществить опыт с увеличением внутреннего трения раствора без изменения его других свойств. Мы произвели параллельные измерения хода потен-

циала при одинаковой плотности тока для обычного 1n раствора $CdSO_4$ и для раствора $CdSO_4$ той же концентрации, вязкость которого была повышена введением тростникового сахара. Коэффициент внутреннего трения второго раствора был в 80 раз больше, чем первого. Результаты измерений представлены на фиг. 9. Для раствора, содержащего сахар, глубина минимума больше, больше и время «рассасывания» минимума. Получая хорошую воспроизводимость при этих измерениях, мы не можем конечно утверждать, что изменение хода потенциала зависит только от изменения внутреннего трения раствора, поскольку изменился самый состав последнего.




Фиг. 9. Влияние добавки тростникового сахара на область роста зародышей при выделении Cd на платиновом электроде. Левая кривая для чистого раствора $CdSO_4$ 1 n, правая для раствора $CdSO_4$ 1 n с добавкой сахара. Отношение коэффициентов внутреннего трения растворов = 1 : 80.



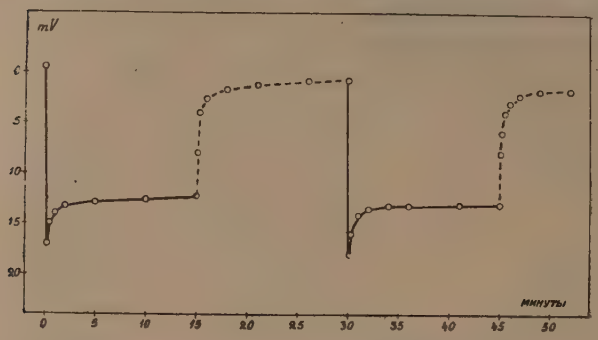

Фиг. 10. Изменение потенциала Pt-электрода в растворе $AgNO_3$ 1 n. В момент, отмеченный крестиком, выключен ток. На участке деполяризации — «кник» при потенциале равновесия серебра в данном растворе

Другие опыты. Должны быть отмечены еще следующие наблюдения

1. Если прервать ток вскоре после прохождения минимума и следить за деполяризацией электрода, то на кривой деполяризации обнаруживается остановка при потенциале равновесия выделяемого металла. На фиг. 10 представлены результаты одного из опытов с платиновым электродом в растворе $AgNO_3$. Ток прерван в момент, отмеченный на кривой крестиком. Пунктирная кривая дана для аналогичного опыта без выключения тока. В опытах, когда ток выключился при более низком потенциале, чем потенциал устойчивого выделения металла, но до наступления минимума, оста-

новки обнаружить не удавалось. Ее появление вызывается, безусловно, образованием новой фазы на электроде.

2. При выделении металла на электроде из одноименного металла, также наблюдается некоторое перенапряжение $\Delta\pi$, но значительно меньшее, чем при выделении этого металла на индиферентном электроде. Фиг. 11 относится к выделению Ag на серебряном электроде. Из нескольких последовательно произведенных опытов видно, что после каждого включения тока наблюдается минимум потенциала глубиною около 5 mV при плотности тока $3.10^{-6}$ А/см.$^2$ По выключении тока (пунктирная часть кривой), наблюдается подъем до потенциала равновесия серебра в данном растворе.




**Фиг. 11.** Поляризация серебряного электрода в растворе $AgNO_3$. $i = 3 \cdot 10^{-6}$ А/см$^2$. Пунктирная часть кривой снята при выключенном токе.

3. Если платиновый электрод погрузить в раствор $AgNO_3$, содержащий некоторое количество восстановителя,[1] то, по причине идущего восстановительного процесса $Ag^{\cdot} \longrightarrow Ag$, электрод дает без тока совершенно такую же картину изменения потенциала во времени, как электрод в чистом растворе $AgNO_3$ при катодной поляризации. На фиг. 12 приведен ход потенциала платинового электрода в 1 n растворе $AgNO_3$, содержащем сахар. «Перенапряжение» $\Delta\pi$ для этого опыта составляет 18 mV. Глубина минимума возрастает с увеличением скорости процесса $Ag^{\cdot} \longrightarrow Ag$.

## Обсуждение результатов

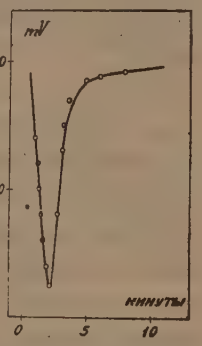
Вопрос о механизме электролитического выделения металлов является весьма сложным и на основании имеющегося литературного материала, а также и на основании наших опытов не решается однозначно во всех деталях.

Следует считать экспериментально доказанным, что образование первых зародышей металла на электроде начинается при некотором перена-

[1] В наши растворы был введен тростниковый сахар.

пряжении. $\Delta\pi$, по сравнению с потенциалом устойчивого выделения металла (точка $b$ на фиг. 3). На участке кривой $bc$ эти зародыши растут, приобретая в точке $c$ свойства массивного электрода. Естественно было бы предположить, что рост потенциала в области $bc$ связан с увеличением размера кристалликов выделившегося металла.[1] Фактически дело обстоит сложнее.

Анализ полученных результатов показывает, что рост зародышей металла не имеет непосредственной связи с процессом нейтрализации ионов.[2] Если бы нейтрализация иона и вхождение его в решетку совершались в один акт, нужно было бы ожидать одинаковую глубину минимума при любых плотностях тока (потенциал первичных зародышей — величина постоянная). Кроме того, рост потенциала электрода для больших плотностей тока должен был бы завершаться быстрее. Но как было показано, с изменением плотности тока глубина минимума не остается постоянной, а подъему кривой в области $bc$ при разных плотностях тока соответствуют приблизительно одинаковые промежутки времени (фиг. 5, 6 и 7). Отметим здесь же, что эти промежутки времени неодинаковы для различных металлов. Например, рост потенциала платинового электрода в области $bc$ завершается скорее при выделении Cd, чем при выделении Ag (фиг. 3 и 6). Опыты с перерывом тока тотчас после прохождения минимума также подтверждают независимость роста зародышей от процесса нейтрализации иона.




**Фиг. 12.** Самопроизвольное ($i = 0$) изменение потенциала — Pt-электрода в растворе $AgNO_3$, содержащем восстановитель.

На основании приведенных соображений следует заключить о существовании некоторого промежуточного состояния между ионом в растворе и выделившимся атомом металла на электроде. «Промежуточную фазу» можно себе представить или как раствор металла около электрода, или как некоторый адсорбционный слой на его поверхности. Ход кривой в области минимума объясняется явлениями пересыщения этой промежуточной фазы. Можно полагать, что нейтрализация ионов металла на индиферентном электроде начинается еще до наступления минимума. Разрядившиеся атомы или остаются в приэлектродном слое раствора, или создают на поверхности

[1] Небольшим кристалликам следует приписать менее благородный потенциал, по сравнению с массивным электродом.

[2] В литературе встречается противоположное мнение. Так напр. Fröhlich u. Clark (Ztschr. f. Elektroch. 31, 649, 1925) считают, что нейтрализация иона и вхождение его в кристаллическую решетку протекает как один процесс.

электрода адсорбционный слой. До образования первых зародышей металла имеет место пересыщение, степень которого определяется скоростью нейтрализации ионов (плотностью тока или скоростью восстановительного процесса $Ag^{\cdot} \longrightarrow Ag$). Но раз зародыши появились, они действуют автокаталитически при образовании новой фазы. Время «рассасывания» пересыщения (область *bc*) будет зависеть от скорости кристаллизации. В точке *C* наступает равновесие между выделившимся металлом и промежуточной фазой.

Опыты с растворами, вязкость которых повышена добавкой сахара, если иметь в виду ранее сделанные оговорки, скорее говорят в пользу существования растворов металла в приэлектродной зоне, чем в пользу адсорбционного слоя на электроде. Существованием пересыщенных растворов металла легче объясняются и опыты с выделением серебра на серебряном электроде (фиг. 11). Для последнего случая приходится сделать предположение о возникновении окисной пленки на поверхности металла, которая нарушает непосредственный контакт между металлом и раствором. Образование окисной пленки весьма вероятно. Окислением металла на электроде повидимому следует объяснить и тот факт, что кривая фиг. 10 дает при потенциале равновесия только короткую остановку, а не устойчивое во времени значение потенциала.

В литературе вопрос о существовании металлических растворов и особенно об их роли в электродном процессе при выделении металлов нельзя считать разрешенным. Так, например, в опытах Бозе (Bose)[1] видят доказательство существования водных растворов металлического серебра, хотя сам автор работы их объясняет образованием суб-соединений серебра. Леблан, в цитированной работе, для объяснения перенапряжения при электролитическом выделении металлов, приводит соображения об образовании пересыщенных растворов металла около катода. Вопрос о растворимости металлической ртути и воде, метиловом алкоголе и гексане изучен методом абсорбционных спектров Reichard u. Bonhoeffer.[2]

С другой стороны имеются и возражения как против самого существования металлических растворов, так и против какого-либо их участия в электродном процессе. Такого рода возражения приводятся в работе Фольмера о теории процессов на неполяризующихся электродах.[3] В этой работе явления поляризации рассматриваются с точки зрения существова-

[1] Ztschr. f. Elektroch. 13, 477, 1907.
[2] Ztschr. f. Phys. 67, 780, 1931.
[3] M. Volmeer. Ztschr. f. phys. Ch. (A) 139, 597, 1928.

ния адсорбционного слоя на поверхности электрода; там же высказываются соображения и о структуре этого слоя. Следует отметить, что Фольмером на основании его более ранних работ предполагается наличие адсорбционного слоя только на кристаллической поверхности. Однако кривые фиг. 7 показывают, что выводы, сделанные в отношении процессов, протекающих при выделении кристаллических осадков металла, относятся и к выделению жидкой ртути. В этом последнем случае также несомненно существование «промежуточной фазы» между ионным состоянием ртути в растворе и в виде металлических зародышей на электроде. Теория адсорбционного слоя, развитая Фольмером, на данном примере не находит подтверждения.

В заключение считаем приятным долгом принести сердечную благодарность начальнику Химического сектора ГОИ академику Илье Васильевичу Гребенщикову за его постоянный интерес к нашей работе.

Государственный Оптический
институт. Химический сектор.
Ленинград
Май 1933 г.

## A. SAMARCEV et K. EVSTROPIEV. POTENTIEL DE FORMATION ET DE DÉGAGEMENT DES MÉTAUX SUR UNE ÉLECTRODE INDIFFÉRENTE

RÉSUMÉ

L'apparition des premiers germes du métal qui se dégage sur l'électrode indifférente est accompagnée d'une certaine surtension par rapport au potentiel qui correspond au dégagement stabilisé. Une méthode établie par les auteurs a permis d'étudier les relations entre cette surtension et différents facteurs (densité du courant, température et concentration de la solution, coefficient de frottement interne de la solution etc.).

On en conclut que la neutralisation de l'ion et le dégagement de l'atome métallique sur l'électrode sont deux actes distincts, ce qui conduit à l'hypothèse d'une phase intermédiaire entre l'état ionique du métal dans la solution et l'état de cristaux ou de gouttes liquides (pour le mercure) sur l'électrode.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

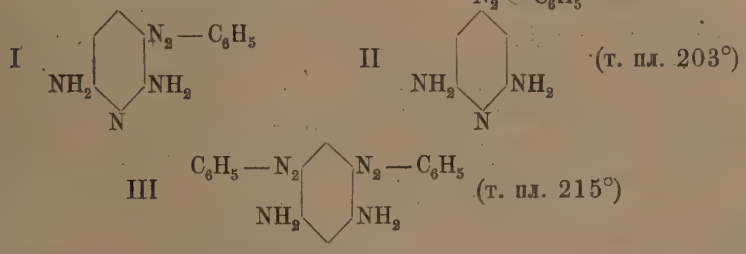
# γ-ФЕНИЛАЗО-$\alpha\alpha_1$-ДИАМИНОПИРИДИН

А. Е. ЧИЧИБАБИНА и Е. Д. ОСЕТРОВОЙ

(*Представлено* Лабораторией по исследованию и синтезу растительных и животных продуктов)

В 1928 г. Патентное бюро Соединенных Штатов Америки выдало Ивану Остромысленскому патент[1] по заявке от 26 марта 1926 г. под заглавием «Метод получения пиридия» (№ 1, 680, 109).

Именем «Pyridium» Остромысленский назвал продукт, получающийся при действии диазотированного анилина на $\alpha\alpha_1$-диаминопиридин. Хотя автору было хорошо известно, что продукт вышеуказанной реакции, каковым является β-фенилазо-$\alpha\alpha_1$-диаминопиридин, был значительно раньше получен и описан Чичибабиным и Зейде,[2] но об этом автор не счел нужным упомянуть. Но за то автор утверждает, что при этой реакции, кроме главного продукта I, для которого указываются свойства, согласные с описанием Чичибабина и Зейде, образуются и другие продукты. И именно, в патенте указываются свойства следующих двух веществ, которым Иван Остромысленский приписывает (бездоказательно) строения II и III:




Образование вещества строения III не представляет для химиков ничего невероятного, и лишь экспериментальная проверка может установить его образование в описываемых условиях. Но образование вещества II для химика, имеющего уже элементарное представление о реакциях образования азокрасок, должно представиться совершенно невозможным. Из всего

[1] U. S. Patent 1, 680, 109. Serial. № 97771. (1928). Ch. Zbl. 1929, I, 1026.

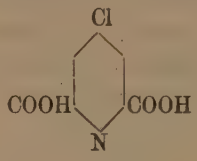
[2] Чичибабин, Зейде. Ж. Х. О. 46, 1216 (1914); Ch. Zbl., 1915, I, 1069.

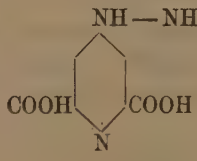
громадного количества исследованных реакций получения азокрасок нет ни одного случая, когда бы азогруппа входила бы в мета-положение к амино- или окси-группам, а ориентирующие влияния в ряде пиридина делают образование таких азокрасок еще менее возможным.

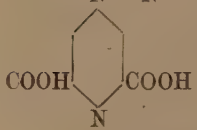
Несмотря на явную ложность утверждения об образовании краски II, ввиду того, что это утверждение было принято без возражения Американским патентным бюро, нами был предпринят труд получения вещества этого строения путем реакций, строго устанавливающих это строение.

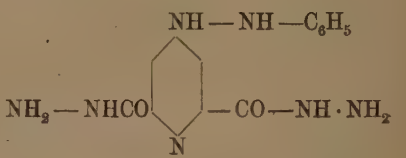
Путь для его получения был нижеследующий:

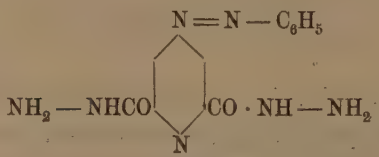
Действием фенилгидразина на γ-хлоридипиколиновую кислоту IV получается γ-фенилгидразо-дипиколиновая кислота V, которая при окислении уже кислородом воздуха дает γ-фенилазо-дипиколиновую кислоту VI. Метиловый эфир этой кислоты дает при действии гидразина, вследствие восстановления азогруппы, γ-фенилгидразо-$\alpha\alpha_1$-дигидразинокарбопиридин VII, кислородом воздуха окисляемый в γ-фенилазодигидразинокарбопиридин VIII. При действии на последний азотистой кислоты получается γ-фенилазо-$\alpha\alpha_1$-диазидокарбопиридин IX, дающий при кипячении со спиртом диуретан X, при недостаточном же кипячении со спиртом получается также моноуретан XI. Омылением диуретана и был получен γ-фенилазо-$\alpha\alpha_1$-диаминопиридин II, к получению которого мы стремились.

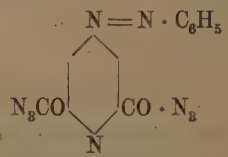
IV 

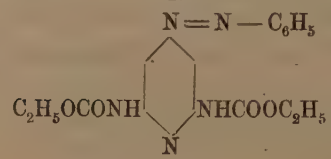
V 

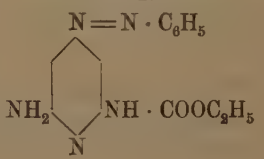
VI 

VII 

VIII 

IX 

X 

XI 

Как и следовало ожидать, свойства этого соединения оказались иными чем те, которые указывает Остромысленский для вещества II. К этому мы можем еще прибавить, что при многочисленных опытах получения β-фенилазо-$\alpha\alpha_1$-диаминопиридина, ни вещества со свойствами, указываемыми Остромысленским для вещества II, ни вещества со свойствами γ-фенилазо-$\alpha\alpha_1$-диаминопиридина обнаружить было невозможно.

Что касается бисазосоединения формулы III, то произведенные в нашей лаборатории опыты действия избытка диазотированного анилина на диаминопиридин показали, что в числе других продуктов может получаться и это соединение со свойствами, довольно близкими к указываемым в патенте. Но многочисленные опыты получения β-фенилазо-$\alpha\alpha_1$-диаминопиридина в условиях, когда нет избытка солей фенилдиазония показывают, что при этом бисазосоединение или вовсе не образуется, или образуется в совершенно ничтожных количествах, и уже однократной кристаллизации совершенно достаточно, чтобы β-фенилазо-$\alpha\alpha_1$-диаминопиридин не содержал сколько-нибудь заметных его следов.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

### γ-Фенилгидразодипиколиновая кислота

10 г хлордипиколиновой кислоты[1] и 10—13 см³ фенилгидразина нагревались в течение часа на масляной бане в колбе, запертой пробкой с трубкой, оттянутой в капилляр. Продукт реакции растворялся в 5%-ном едком натре при нагревании на водяной бане. Охлажденный раствор промывался эфиром от избытка фенилгидразина, после чего уксусной кислотой осаждалась непрореагировавшая хлордипиколиновая кислота. Последняя отфильтровывалась, и получившаяся фенилгидразодипиколиновая кислота осаждалась из раствора осторожным прибавлением соляной кислоты. Количество полученной таким образом фенилгидразодипиколиновой кислоты равнялось 40—50% теоретического. При долгом стоянии маточного раствора выделялись в количестве около 1 г еще хорошо образованные кристаллы, после перекристаллизации из спирта плавившиеся при 220° с разложением; эти кристаллы пока ближе не были исследованы.

γ-Фенилгидразодипиколиновая кислота хорошо кристаллизуется из спирта в виде игол или мелких призм светложелтого оттенка. Кристаллы содержат молекулу спирта, которую они теряют при нагревании при

[1] E. Königs, Jäschke. Ber. 54, 1351 (1921).

150—160°. При медленном нагревании кислота теряет спирт и плавится с разложением при 231°.

Соединение со спиртом. 1) 0.4452 г вещ.: после нагревания при 150° потеря в весе 0.0648 г, 2) 0.1090 г вещ.: $CO_2$ 0.2248 г, $H_2O$ 0.0544 г.

$C_{13}H_{11}O_4N_3 + C_2H_5OH$. Вычислено % спирта 14.43 % C 56.40 % H 5.37
Найдено » 14.55 » 56.03 » 5.59

Высушенная при 150° кислота. 1) 0.1194 г вещ.: $CO_2$ 0.2498 г, $H_2O$ 0.0452 г, 2) 0.1285 г вещ.: N 17.9 см³, (19.5° и 746 мм).

$C_{13}H_{11}O_4N_3$. Вычислено % C 57.11 H 4.07 N 15.42
Найдено » 57.10 » 4.23 » 15.60

### γ-Фенилазодипиколиновая кислота

Окисление γ-фенилгидразодипиколиновой кислоты в фенилазодипиколиновую кислоту производилось кислородом воздуха. Через слабо щелочной раствор фенилгидразодипиколиновой кислоты, нагреваемый на водяной бане, пропускался ток воздуха втечение шести часов, после чего кислота осаждалась соляной кислотой.

γ-Фенилазодипиколиновая кислота кристаллизуется из 80%-ной уксусной кислоты в виде коричнево-красных серповидно изогнутых пластинок, содержащих $^1/_2$ молекулы кристаллизационной уксусной кислоты. При медленном нагревании в капилляре кристаллы теряют уксусную кислоту и плавятся с разложением при 270°.

Кристаллизационное соединение. 0.1184 г вещ.: потеря при высушивании при 110° 0.106 г.

$C_{13}H_9O_4N_3 + {}^1/_2\ C_2H_4O_2$. Вычислено % $C_2H_4O_2$ 9.09; найдено 8.95.

Высушенное вещество. 1) 0.1078 г вещ.: N 14.5 см³ (16° и 760 мм). 2) 0.1060 г вещ.: N 14.5 см³ (19° и 754 мм).

$C_{13}H_9O_4N_3$. Вычислено % N 15.49; найдено 15.51; 15.53.

### Метиловый эфир γ-фенилазодипиколиновой кислоты

Эфир получался действием иодистого метила на серебряную соль фенилазодипиколиновой кислоты. Для получения серебряной соли кислота растворялась в возможно малом количестве слабого раствора едкого натра, и раствор осаждался раствором азотносеребряной соли. Соль выпадала в виде розового порошка. Для полноты ее осаждения требовалось прибли-

зительно двойное количество азотносеребряной соли против теоретического для средней соли. Это обстоятельство, а также определение в соли серебра (найдено 53.60 и 53.95%, тогда как для средней соли требуется содержание серебра 44.32%), показывает, что здесь образуется основная или комплексная соль.

К серебряной соли, полученной из 1.75 г чистой фенилазодипиколиновой кислоты, прибавлялось 1.8 см³ иодистого метила и 50 см³ сухого толуола, и смесь нагревалась два часа при 60—75° и еще три часа на кипящей водяной бане. После охлаждения толуольного раствора из него выделилось 0.25 г кристаллического эфира и после сгущения раствора отгонкой толуола еще 0.55 г такого же эфира. Из остатка обработкой щелочью и осаждением щелочного раствора кислотой можно было выделить непрореагировавшую азокислоту.

Метиловый эфир кристаллизуется из метилового спирта в виде длинных тонких оранжевокрасных блестящих призм с температурой плавления 175°.

1) 0.1246 г вещ.: N 15.6 см³ (19° и 758 мм); 2) 0.1620 г вещ.: N 20.3 см³ (21° и 751 мм), 3) 0.1738 г вещ.: N 21.8 см³ (17° и 752 мм).

$C_{15}H_{13}O_4N_3$. Вычислено % N 14.05; найдено: 14.27; 14.03; 14.30.

### Дигидразид γ-фенилазодипиколиновой кислоты

3 г метилового эфира фенилазодипиколиновой кислоты нагревались в течение часа на масляной бане при 200° с 3 см³ перегнанного гидразин-гидрата (на молекулу метилового эфира 6 молекул гидразин-гидрата).

Продукт реакции представляет бесцветную массу. Повидимому, получается дигидразид γ-фенилгидразодипиколиновой кислоты. При кристаллизации на воздухе он краснеет вследствие окисления и образования дигидразидофенилазодипиколиновой кислоты.

Продукт реакции отсасывался и промывался спиртом от избытка гидразин-гидрата. Неперокристаллизованного продукта было выделено 2.8 г, что составляет 93% от теоретического количества.

Дигидразид перекристаллизовывался из кипящей воды, причем он краснеет. Перекристализованный, он представляет шаровидные аггрегаты мельчайших кирпичнокрасных иголочек. После четырех перекристаллизаций он плавился при 228°.

0.0831 г вещ.: N 26.7 см³ (19° и 737 мм).

$C_{13}H_{13}O_2N_7$. Вычислено % N 32.78; найдено 32.97.

### Диазид γ-фенилазодипиколиновой кислоты

0.5 г дигидразида растворялись в литре воды при кипячении, раствор охлаждался до —5°, затем приливался раствор 0.4 г азотистонатриевой соли и по каплям, при перемешивании мешалкой, раствор 3.8 см³ крепкой соляной кислоты в 30 см³ воды. Выпавший осадок диазида отфильтровывался. Его получилось 0.5 г.

Для очищения диазид растворялся в абсолютном эфире. 1 г диазида растворяется при кипячении в 300 см³ абсолютного эфира, но при охлаждении раствора вещество не выделяется, кристаллизуется же лишь после отгонки почти всего эфира. Выделенный таким образом кристаллический диазид плавится без вспышки при 110°. При нагревании на шпателе над пламенем горелки он дает вспышку.

### Диуретан

2.8 г перекристаллизованного диазида кипятились $1^1/_2$ часа с 55 см³ абсолютного спирта. Выделявшийся азот измерялся. Выделилось 340 см³ азота (20° и 752 мм), что составляет 78% теоретического количества.

При охлаждении спиртового раствора выделилось 0.65 г диуретана. После отгонки 30 см³ спирта и стояния в эксикаторе выделилось еще 1.05 г диуретана. Выделенные 1.7 г диуретана соответствует 57% теоретического количества.

Диуретан кристаллизуется из 50%-го алкоголя в виде блестящих оранжевокрасных кристаллов, под микроскопом имеющих вид плоских четырехгранных пирамид (конверты), плавящихся при 182°.

0.1093 г вещ.: N 19.3 см³ (17° и 739 мм).

$C_{17}H_{19}O_4N_5$. Вычислено N 19.60; найдено 19.83.

### αα-диамино-γ-фенилазо-пиридин

1.85 г диуретана кипятились четыре часа с раствором 2 г едкого кали в 40 см³ абсолютного спирта. Уже через 10 минут начинает выпадать светлобурый осадок. При дальнейшем кипячении осадок делается темно-красным. После охлаждения в смесь пропускался углекислый газ в течение 15 минут. Затем продукт упаривался почти досуха на водяной бане, к остатку прибавлялся крепкий аммиак, и смесь кипятилась некоторое время. После охлаждения выпало 1.1 г кристаллов красного цвета. После кристаллизации из бензола γ-фенилазо-диаминопиридин получен в виде пунцовокрасных блестящих длинных плоских игол, плавящихся при 170—171°.

1) 0.0613 г вещ.: N 17.0 см³ (21° и 749 мм); 2) 0.0693 г вещ.: N 21 см³ (27° и 746 мм); 3) 0.0643 г вещ.: $CO_2$ 0.1150 г, $H_2O$ 0.0295 г.

$C_{11}H_{11}N_5$. Вычислено % C 61.93, H 5.20, N 32.87
Найдено » 61.50, » 5.13, « 32.61; 32.64

## Моноуретан

Если отфильтровать светлобурый осадок, выделяющийся вначале кипячения диуретана со спиртовой щелочью, то из него удается выделить два вещества: оранжевое, кристаллизующееся хорошо из 25%-ного алкоголя в виде оранжевожелтых мелких листочков с температурой плавления 143°, и очень небольшое количество красного фенилазодиаминопиридина с температурой плавления 170—171°. Оранжевое вещество представляет моноуретан.

1) 0.0772 г вещ.: $CO_2$ 0.1658 г, $H_2O$ 0.0367 г; 2) 0.0794 г вещ.: N 17.4 см³ (25° и 752 мм); 3) 0.0852 г вещ.: N 19.3 см³ (27° и 745.5 мм).

$C_{14}H_{15}O_2N_5$. Вычислено % C 58.90, H 5.30, N 24.56
Найдено » 58.60, » 5.32, » 24.30; 24.38.

При кипячении со спиртовой щелочью моноуретан переходит в диуретан.

## A. E. TCHITCHIBABINE et E. D. OSSETROVA. γ-PHÉNYLAZO-$\alpha\alpha_1$-DIAMINOPYRIDINE

RÉSUMÉ

Le bureau des brevets d'invention des États-Unis d'Amérique délivra en 1928 un brevet à Ivan Ostromislensky[1] «conformément à sa demande du 26 Mars 1926, sous le titre suivant: «Méthodes pour obtenir la pyridine» (№ 1, 680, 109).

«Pyridium», fut le nom qu'il donna au produit obtenu par l'action de l'aniline diazotée sur la $\alpha\alpha_1$-diaminopyridine. Quoique l'auteur eût eu une connaissance parfaite que le produit de la réaction ci-dessus mentionnée, tel qu'est β-phénylazo-αα-diaminopyridine avait été obtenu beaucoup plus tôt par Tchitchibabine et Zaïde,[2] cependant, il ne trouva même pas nécessaire d'en faire mention. Au lieu de le faire cet auteur affirme que pendant cette réaction, outre le produit principal I, pour lequel il a indiqué les propriétés conformes à celles qui sont décrites par Tchitchibabine et Zaïdé, se sont aussi formés d'autres produits. Et précisément, dans ce brevet sont indiquées les propriétés de deux substances suivantes, auxquelles Ivan Ostromislensky attribue (sans donner des preuves) la II et III structure:

[1] U. S. Patent 1, 680, 109. Serial № 97771. Ch. Zbl. 1929, 1, 1026.
[2] Tchitchibabine et Zaïdé. Журн. Хим. общ., 46, 1216 (1914). Ch. Zbl. 1915, 1, 1069.

La formation de la substance de la structure III ne présente rien d'improbable aux chimistes, et une vérification expérimentale seule peut assurer sa formation dans les conditions décrites par l'auteur. Mais la formation de la substance II doit paraître complètement improbable à un chimiste, possédant les notions élémentaires des réactions formant les couleurs azoïques. De toute l'énorme quantité de recherches pour obtenir les couleurs azoïques, il n'y avait pas un seul cas que le groupe azoïque entrât dans la méta-position vers les amino- ou oxygroupes et les influences d'orientation dans la rangée de pyridine rendent encore plus improbable la formation de pareilles couleurs azoïques.

Malgré l'évidente erreur dans l'assertion sur la formation de la couleur II, et puisque cette assertion avait été acceptée sans objection par le Bureau des brevets d'invention en Amérique, nous avons entrepris la tâche d'obtenir les substances de cette structure par le moyen de réactions, qui puissent confirmer cette structure d'une manière exacte.

Le moyen de son obtention avait été le suivant:

Par l'action de la phénylhydrazine sur γ-l'acide chlorodipicoline IV on obtient l'acide γ-phénilhydrazodipicoline V; ce dernier, s'oxydant avec l'oxygene de l'air, produit l'acide γ-phénylazo-dipicoline VI. L'éther méthylique de cet acide produit sous l'action de la hydrozine, en conséquence de la récupération du groupe azotique, la γ-phénylhydrazo-αα-dihidrazinocarbopyridine VII, que s'oxyde par l'oxygène de l'air en γ-phénylazodihydrozinopyridine VIII. Par l'action de l'acide azotique sur cette dernière, on obtient la γ-phénylazo-αα-diazidocarbopyridine IX, produisant pendant l'ébullition avec l'alcool la diurethane X, dans le cas d'une ébullition insuffisante avec l'alcool on obtient également la monoürethane XI. Par la saponification de la diurethane, on a obtenu la γ-phénylazo-αα-diaminopyridine II, dont l'obtention était notre but.

Comme on devait s'y attendre, les propriétés de cette combinaison se sont révélées différentes de celles qui avaient été indiquées par Ostromislensky pour la substance II. Nous pouvons encore y ajouter que pendant les expériences nombreuses pour obtenir la β-phénylazo-αα-diaminopyridine, il a été impossible de découvrir la substance aux propriétés signalées par Ostromislensky pour la substance II, ainsi que la substance ayant les propriétés de γ-phénylazo-αα-diaminopyridine.

En ce qui concerne la composition bisazoïque de la formule III, les expériences qui ont eu lieu dans notre laboratoire sur l'action de l'excès de l'aniline diazotée sur la diaminopyridine ont démontré que parmi d'autres produits cette composition peut aussi être obtenue possédant des propriétés assez proches aux indiquées dans le brevet. Mais les nombreuses expériences, dans le but d'obtenir la γ-phénylazo-$\alpha\alpha_1$-diaminopyridine dans les conditions d'absence de l'excès de sels du phényldiazone, montrent que dans ce cas la combinaison bisazoïque ou bien ne se produit point du tout ou se produit en une quantité négligeable, et qu'une cristallisation unique est complétement suffisante pour que la β-phénylazo-$\alpha\alpha_1$-diaminopyridine n'en contienne aucune trace visible.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1934
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

# SUR LE SEPTIÈME PROBLÈME DE HILBERT

Par A. GELFOND

(*Presenté par* I. Vinogradov, *Membre de l'Académie*)

Au Congrès international des Mathématiciens, tenu à Paris en 1900, D. Hilbert, parmi ses 23 problèmes, en posa un concernant la nature arithmétique des nombres $\omega^{\eta}$, où $\omega$ est un nombre algébrique et $\eta$ un nombre algébrique irrationnel.

Le présent travail donne l'exposé complet d'une solution générale du problème, dont la marche se trouve déjà résumée dans ma note sous le même titre, parue aux «Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS» (1934, vol. II, № 1, p. 1). La même note renferme un bref aperçu de la situation à ce jour du problème posé par Hilbert.

Soient $\alpha \neq 0,1$ et $\beta \neq 0,1$ des nombres algébriques. Admettons que $\eta = \frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ soit un nombre algébrique irrationnel. Admettons de plus que les nombres $\alpha$, $\beta$ et $\eta$ appartiennent, respectivement, à des équations de degrés $p_1$, $p_2$ et $p_3$ à coefficients rationnels entiers.

Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p_1-1}$ des nombres conjugués à $\alpha$, par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p_2-1}$ et par $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p_3-1}$ des nombres conjugués à $\beta$ et $\eta$. Soit $c > 0$ un nombre entier rationnel tel que les nombres $c\alpha$, $c\beta$ et $c\eta$ soient des nombres entiers algébriques.

Introduisons une série de constantes qui nous seront nécessaires par la suite.

Définissons d'abord des constantes $\gamma, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ par les égalités suivantes:

$$\gamma = e^{2\pi} \operatorname{Max}[3, |\alpha|, |\alpha_1|, \ldots, |\alpha_{p_1-1}|, |\beta|, |\beta_1|, \ldots, |\beta_{p_2-1}|, |\eta|, |\eta_1|, \ldots, |\eta_{p_3-1}|]. \tag{1}$$

$$\lambda_1 = 2 \ln 3 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3. \tag{2}$$

$$\lambda_2 = (2 \ln \gamma + 4 \ln c) p_1 \cdot p_2 \cdot p_3. \tag{3}$$

$$\lambda_3 = 2 p_1 \cdot p_2 \cdot p_3. \tag{4}$$

$$\lambda_4 = \ln [2 \ln \gamma]. \tag{5}$$

$$\lambda_5 = 2 \ln \gamma. \tag{6}$$

Il est évident que les constantes définies de la sorte dépendent exclusivement des propriétés des nombres algébriques $\alpha$, $\beta$ et $\gamma_1$.

Introduisons ensuite dans nos opérations des constantes

$$q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ \ldots,\ q_8,$$

qui seront toutes des nombres entiers positifs définis par les conditions que pour chaque nombre entier positif $q \geqq q_i$, $i = 1, 2, \ldots, 8$ doit être remplie une certaine inégalité. Ces inégalités se présentent comme suit:

Pour $q \geqq q_1$,

$$\ln q > \ln(\gamma + \gamma^2) + 2\ln c; \tag{7}$$

pour $q \geqq q_2$,

$$\frac{\ln q}{\ln\ln q} > 4(3\ln 3 + \lambda_4 + \lambda_5); \tag{8}$$

pour $q \geqq q_3$,

$$\frac{\ln q}{\ln\ln q} > 4(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3); \tag{9}$$

pour $q \geqq q_4$,

$$\ln\ln q > 6(2\ln 6 + \lambda_5); \tag{10}$$

pour $q \geqq q_5$,

$$\ln\ln q > 12(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3); \tag{11}$$

pour $q \geqq q_6$,

$$q^{7/3} < \frac{1}{2}\frac{q^{5/2}}{\ln\ln q} - (2\ln 6 + \lambda_5)\frac{q^{5/2}}{\ln q \ln\ln q}; \tag{12}$$

pour $q \geqq q_7$,

$$q^{7/3} > 5q^2\ln(5q^2) + \ln 2; \tag{13}$$

pour $q \geqq q_8$,

$$q^{7/3} > 5(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)q^2\ln q. \tag{14}$$

Comme les constantes précédemment introduites $\lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, dépendaient seulement de la nature des nombres $\alpha$, $\beta$ et $\gamma_1$, de même les constantes $q_k$, $k = 1, 2, \ldots, 8$, ne dépendent rien que des propriétés algébriques de ces mêmes nombres.

Posons également

$$r_1 = \left[\frac{q_0^2}{\ln q_0 \ln\ln q_0}\right],\quad r_2 = [\ln^2 \ln q_0] \tag{15}$$

et

$$q_0 = 1 + \mathrm{Max}[3^{3^4},\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,\ q_7,\ q_8]. \tag{16}$$

Par cela nous fixons ferme les nombres $q_0, r_1, r_2$.

Nous considérerons dans la suite des nombres $s$ et $t$ qui seront toujours non négatifs, entiers et variables.

Examinons maintenant la fonction

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=q_0} \sum_{l=0}^{l=q_0} C_{k,l}\, \alpha^{kx}\, \beta^{lx}, \tag{17}$$

où tous les nombres $C_{k,l}$; $k = 0, 1, \ldots, q_0$; $l = 0, 1, \ldots, q_0$, doivent être entiers et rationnels.

Pour de telles fonctions nous allons démontrer trois lemmes qui nous seront nécessaires par le suite.

Lemme I. *Quels que soient les nombres entiers rationnels $C_{k,l}$ entrant dans la fonction $f(x)$ [égalité (17)], si $C_{k,l} \leqq 3^{q_0^2}$ et si nous admettons que les trois nombres $\alpha$, $\beta$ et $\eta = \dfrac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ soient algébriques en même temps, alors ou bien est remplie l'inégalité*

$$|f^{(s)}(t)| > e^{-(\lambda_1 q_0^2 + \lambda_2 q_0 t + \lambda_3 s \ln q_0)}, \tag{18}$$

*où les nombres $q_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ sont définis par les égalites* (16), (2), (3), (4), *ou bien*

$$f^{(s)}(t) = 0. \tag{19}$$

Démonstration. Considérons l'expression $\left[\dfrac{d^{(s)} f(x)}{dx^s}\right]_{x=t}$:

$$\begin{aligned} f^{(s)}(t) &= \sum_{k=0}^{k=q_0} \sum_{l=0}^{l=q_0} C_{k,l} (k \ln \alpha + l \ln \beta)^s\, \alpha^{kt}\, \beta^{lt} = \\ &= \ln^s \beta \sum_{k=0}^{k=q_0} \sum_{l=0}^{l=q_0} C_{k,l} (k\eta + l)^s\, \alpha^{kt}\, \beta^{lt}. \end{aligned} \tag{20}$$

Puisque les nombres $\alpha$, $\beta$ et $\eta$ sont algébriques et les nombres $c\alpha$, $c\beta$ et $c\eta$ entiers algébriques, il en résulte que pour des $C_{k,l}$, $s$ et $t$ fixés le nombre

$$f^{(s)}(t) \ln^{-s} \beta = \sum_{k=0}^{k=q_0} \sum_{l=0}^{l=q_0} C_{k,l} (k\eta + l)^s\, \alpha^{kt}\, \beta^{lt} \tag{21}$$

doit être algébrique et le nombre

$$c^{s+2q_0^2} f^{(s)}(t) \ln^{-s} \beta$$

doit être entier algébrique et appartenir à une équation irréductible de dégré $m$ ne dépassant pas $p_1 p_2 p_3$.

Les nombres qui lui sont conjugués d'après cette équation s'obtiendront à l'aide de substitution dans (21) de tous les nombres conjugués à $\alpha$, $\beta$ et $\eta$ ou de quelques-uns d'entre eux.

Il n'est pas difficile d'evaluer aussi bien le nombre

$$c^{s+2q_0^t} f^{(s)}(t) \ln^{-s} \beta$$

que ses conjugués. On obtient immédiatement l'evaluation:

$$\left| c^{s+2q_0^t} \overline{[f^{(s)}(t) \ln^{-s} \beta]} \right| \leqq (q_0+1)^2 3^{q_0^2} q_0^s (\gamma+1)^s \gamma^{2q_0^t} c^{s+2q_0^t} \leqq \leqq e^{2\ln 3 q_0^2} \cdot e^{s\ln q_0 + s\ln(1+\gamma) + s\ln c} \cdot e^{(2\ln\gamma + 2\ln c) q_0^t}, \tag{22}$$

où $\gamma$ est défini par l'égalité (1).

Puisque la norme d'un nombre algébrique différent de zéro n'est pas moindre que 1 en valeur absolue il s'ensuit immédiatement de l'évaluation (22)

$$\left| c^{s+2q_0^t} f^{(s)}(t) \ln^{-s} \beta \right| > e^{-p_1 p_2 p_3 [2\ln 3 q_0^2 + s\ln q_0 + s\ln(1+\gamma) + s\ln c + (2\ln\gamma + 2\ln c) q_0^t]} \tag{23}$$

ou, en dernier lieu, puisque $q_0 > q_1$ (inégalité (7)),

$$\left| f^{(s)}(t) \right| > e^{-(\lambda_1 q_0^2 + \lambda_2 q_0^t + \lambda_3 s\ln q_0)} \tag{24}$$

où $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ sont définis par les inégalités (2), (3), (4).

Lemme II. *A la condition de* $|C_{k,l}| \leqq 3^{q_0^2}$ *les coefficients entiers et dans leur ensemble différents de zéro* $C_{k,l}$ *de la fonction* $f(x)$ *peuvent toujours être choisis de façon à ce que soient simultanément remplies* $r_1$, $r_2$ *conditions, où*

$$r_1 = \left[ \frac{q_0^2}{\ln q_0 \ln\ln q_0} \right], \quad r_2 = [\ln^2 \ln q_0],$$

*et*

$$\left| f^{(s)}(t) \right| < e^{-\frac{1}{6} \frac{q_0^2 \ln q_0}{\ln\ln q_0}}, \quad 0 \leqq s \leqq r_1 - 1, \quad 0 \leqq t \leqq r_2 - 1. \tag{25}$$

Démonstration. Dans l'expression de $f^{(s)}(t)$

$$f^{(s)}(t) = \sum_{k=0}^{q_0} \sum_{l=0}^{q_0} C_{k,l} (k\ln\alpha + l\ln\beta)^s \alpha^{kt} \alpha^{lt} \tag{26}$$

il entre $(q_0+1)^2$ coefficients qui parcourent toutes les valeurs entières entre zéro et $3^{q_0^2}$. Pour satisfaire aux conditions (25) profitons du principe bien connu de Dirichlet. Envisageons un espace à $2r_1 r_2$ dimensions et déposons suivant les axes de cet espace les nombres

$$Rf^{(s)}(t) \quad \text{et} \quad If^{(s)}(t) \quad 0 \leqq s \leqq r_1 - 1, \quad 0 \leqq t \leqq r_2 - 1. \tag{27}$$

Sur chacun des axes nous obtiendrons $(3^{q_0^2}+1)^{(q_0+1)^2}$ points. Les points seront disposés le long de chaque axe sur un intervalle dont la longueur n'excédera pas

$$2 \operatorname*{Max}_{\substack{0 \leqq s \leqq r_1-1 \\ 0 \leqq t \leqq r_2-1}} |f^{(s)}(t)| < (q_0+1)^2 3^{q_0^2} q_0^{r_1} (2\gamma)^{r_1} \gamma^{2q_0 r_2} < e^{(2\ln 3+\lambda_4+\lambda_5)q_0^2}, \quad (28)$$

où $\lambda_4$ et $\lambda_5$ sont définis par les égalités (5) et (6).

Divisons chacun de ces intervalles en

$$\left[ e^{\frac{\ln 3}{2} \frac{q_0^2 \ln q_0}{\ln \ln q_0}} \right] \quad (29)$$

parties égales. Faisant passer dans notre espace des plans parallèles aux plans de coordonnés par les points de division, nous y obtenons des cubes au nombre de

$$\left[ e^{\frac{\ln 3}{2} \frac{q^2 \ln q_0}{\ln \ln q_0}} \right]^{2r_1 r_2} < e^{\ln 3\, q_0^4}. \quad (30)$$

Or, la partie de l'espace occupée par ces cubes renferme

$$(3^{q_0^2}+1)^{(q_0+1)^2}$$

de nous susdits points. Par conséquent au moins un de ces cubes devra renfermer au moins deux points différents, dont chacun correspond à l'une de nos $(3^{q_0^2}+1)^{(q_0+1)^2}$ fonctions $f(x)$. Donc, les coordonnées du point qui correspond à la différence de ces deux fonctions devront toutes satisfaire aux inégalités

$$\begin{aligned} |Rf^{(s)}(t)| &< e^{(2\ln 3+\lambda_4+\lambda_5)q_0^2 - \frac{\ln 3}{2}\frac{q_0^2 \ln q_0}{\ln \ln q_0} + \ln 3} \\ |If^{(s)}(t)| &< e^{(2\ln 3+\lambda_4+\lambda_5)q_0^2 - \frac{\ln 3}{2}\frac{q_0^2 \ln q_0}{\ln \ln q_0} + \ln 3}, \\ 0 \leqq s \leqq r_1 - 1, &\quad 0 \leqq t \leqq r_2 - 1. \end{aligned} \quad (31)$$

De là s'ensuivent les inégalités

$$\begin{aligned} |f^{(s)}(t)| &< e^{(3\ln 3+\lambda_4+\lambda_5)q_0^2 - \frac{\ln 3}{2}\frac{q_0^2 \ln q_0}{\ln \ln q_0}} < e^{-\frac{1}{4}\frac{q_0^2 \ln q_0}{\ln \ln q_0}} \\ 0 \leqq s \leqq r_1 - 1, &\quad 0 \leqq t \leqq r_2 - 1, \end{aligned} \quad (32)$$

puisque $q_0 > q_2$ (inégalité (8)).

Ainsi donc, la différence de nos deux fonctions représente une fonction satisfaisent aux exigences du lemme.

Lemme III. *Si* $|C_{k,e}| \leqq 3^{q_0}$, *alors* $f(x) = \sum_{k=0}^{k=q_0} \sum_{l=0}^{l=q_0} C_{k,e}\, \alpha^{kx} \beta^{lx}$ *satisfait, pour n'importe quelle valeur complexe de* $x$ *à l'inégalité*

$$|f(x)| < e^{2 \ln 3 \, q_0^2 + \lambda_5 q_0 |x|}, \tag{33}$$

*où* $A_5$ *est défini par l'égalité* (6).

La démonstration de ce lemme est évidente.

Théorème. *Si* $\alpha \neq 0, 1$ *et* $\beta \neq 0, 1$ *sont des nombres algébriques, le nombre* $\eta = \dfrac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ *sera ou bien rationnel on bien transcendant.*

Démonstration. Supposons tous les trois nombres $\alpha$, $\beta$ et $\eta$ algebriques et $\eta$, de plus, irrationnel. Admettons encore qu'ils satisfassent à toutes les conditions imposées aux nombres $\alpha$, $\beta$ et $\eta$ au commencement de notre mémoire. Alors, suivant le lemme II, on peut trouver une fonction

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=q_0} \sum_{l=0}^{l=q_0} C_{k,l}\, \alpha^{kx} \beta^{lx}, \quad |C_{k,l}| \leqq 3^{q_0}, \tag{34}$$

dont les coefficients $C_{k,l}$ seront des nombres entiers, rationnels et non égaux à zéro dans leur ensemble et pour laquelle seront remplies les inégalités

$$|f^{(s)}(t)| < e^{-\frac{1}{4} q_0^2 \frac{\ln q_0}{\ln \ln q_0}}, \quad 0 \leqq s \leqq r_1 - 1; \quad 0 \leqq t \leqq r_2 - 1. \tag{35}$$

Pour cette fonction doit être valable, avec des entiers quelconques $s \geqq 0$ et $t \geqq 0$, le lemme I, c'est-à-dire que l'on a ou bien

$$|f^{(s)}(t)| > e^{-(\lambda_1 q_0^2 + \lambda^2 q_0 t + \lambda_3 s \ln q_0)} \tag{36}$$

ou bien $f^{(s)}(t) = 0$.

Juxtaposant les inégalités (35) et (36) nous obtenons, puisque $q_0 > q_8$, en vertu de l'inégalité (9), pour notre fonction $f(x)$

$$f^{(s)}(t) = 0 \quad 0 \leqq s \leqq r_1 - 1, \quad 0 \leqq t \leqq r_2 - 1. \tag{37}$$

Donc, la fonction $f(x)\,[x(x-1)\ldots(x-r_2+1)]^{-r_1}$ doit être entière. De là s'ensuit, conformément au principe du maximum et au lemme III, l'inégalité

$$|f(x)\,[x(x-1)\ldots(x-r_2+1)]^{-r_1}| < e^{(2 \ln 3 + \lambda_5) q_0^2 - r_1 r_2 \ln \frac{q_0}{2}} \tag{38}$$

pour $|x| < q_0$.

De (38) il dérive immédiatemant que pour $|x| \leqq q_0^{2/3}$ le module de $f(x)$ satisfait à l'inégalité

$$|f(x)| < e^{(2\ln 3+\lambda_3)q_0^2 - r_1 r_2 \ln\frac{q_0}{2} - \frac{2}{3} r_1 r_2 \ln 2q_0} \tag{39}$$

ou, puisque $q_0 > q_4$, en vertu de l'inégalité (10)

$$|f(x)| < e^{-\frac{1}{6}q_0^2 \ln\ln q_0}, \quad |x| \leqq q_0^{2/3} \tag{40}$$

Mais comme $f(x)$ est une fonction analytique de $x$ nous obtiendrons en en représentant les dérivées par une intégrale de Cauchy, que

$$f^{(s)}(t) = \frac{s!}{2\pi i}\int \frac{f(x)}{(x-t)^s}dx, \quad 0 \leqq t \leqq [\sqrt{q_0}] \tag{41}$$

Cela nous permet d'évaluer le module de $f^{(s)}(t)$ pour un $t$ quelconque $0 \leqq t \leqq [\sqrt{q_0}]$. En effet, l'on a

$$|f^{(s)}(t)| < e^{\frac{q_0^2}{\ln\ln q_0}} e^{-\frac{1}{6}q_0^2 \ln\ln q_0} < e^{-\frac{1}{12}q_0^2 \ln\ln q_0},$$
$$0 \leqq s \leqq r_1, \quad 0 \leqq t \leqq [\sqrt{q_0}]. \tag{42}$$

Juxtaposant les inégalités (42) et (18) nous obtiendrons, puisque $q_0 > q_5$, et partant est remplie l'inégalité (11), en vertu du lemme I, que

$$f^{(s)}(t) = 0, \quad 0 \leqq s \leqq r_1, \quad 0 \leqq t \leqq [\sqrt{q_0}]. \tag{43}$$

Mais alors, la fonction $f(x)[x(x-1)\ldots(x-[\sqrt{q_0}])]^{-r_1}$ doit être entière. Utilisant derechef le principe du maximum d'une fonction analytique, nous aurons l'inégalité

$$|f(x)[x(x-1)\ldots(x-[\sqrt{q_0}])]^{-r_1}| < e^{(2\ln 3+\lambda_3)q_0^2 - r_1\sqrt{q_0}\ln\frac{q_0}{2}}, \tag{44}$$

vraie pour $|x| < q_0$. Il suit de la que chaque $x$, $|x| = 2$, se vérifie l'inégalité

$$|(x)| < e^{(2\ln 3+\lambda_3)q_0^2 - r_1\sqrt{q_0}\ln\frac{q_0}{2} + r_1(\sqrt{q_0}+1)\ln 2\sqrt{q_0}} \tag{45}$$

Mais, puisque $q_0 > q_6$ et que, pour cette raison, l'inégalité (13) est remplie, nous avons

$$f(x)| < e^{-2q_0^{7/3}}, \quad |x| = 2. \tag{46}$$

Ecrivant l'éxpression de $f^{(s)}(0)$ à l'aide de l'integrale de Cauchy,

$$f^{(s)}(0) = \frac{s!}{2\pi i} \int \frac{f(x)\,dx}{x^{s+1}}, \tag{47}$$

nous pouvons évaluer $|x| = 2$ la valeur du module de $f^{(s)}(0)$ pour un $s$ quelconque, $0 \leqq s \leqq 5q_0^2$.

En effet, vu l'inégalité (46), nous avons

$$|f^{(s)}(0)| < e^{5q_0^2 \ln 5 q_0^2 - 2q_0^{7/3}}, \quad 0 \leqq s \leqq 5q_0^2, \tag{48}$$

ou, puisque $q_0 < q_7$ et que l'inégalilé (13) est remplie,

$$|f^{(s)}(0)| \leqq e^{-q_0^{7/3}}, \quad 0 \leqq s \leqq 5q_0^2. \tag{49}$$

En comparant les inégalités (49) et (18) nous pouvons établir que

$$f^{(s)}(0) = 0, \quad 0 \leqq s \leqq 5q_0^2, \tag{50}$$

puisque $q_0 > q_8$ et, par conséquent, est remplie l'inégalité (14).

Or, le système des égalités (50) peut être regardé comme un système d'équations linéaires homogènes à $(q_0+1)^2$ inconnues $C_{k\,l}$,

$$f^{(s)}(0) = \sum_{k=0}^{k=q_0} \sum_{l=0}^{l=q_0} C_{k,l}(k\ln\alpha + l\ln\beta)^s = 0, \quad 0 \leqq s \leqq (q_0+1)^2 - 1, \tag{51}$$

puisque $5q_0^2 > (q_0+1)^2$.

Le déterminant de ce système est évidemment un déterminant de Vandermonde. Il doit être différent de zéro, car la relation

$$k_1 \ln\alpha + l\ln\beta = k_2 \ln\alpha + l_2 \ln\beta; \quad (k_1 - k_2)^2 + (l_1 - l_2)^2 > 0 \tag{52}$$

est impossible en vertu de l'irrationalité du nombre $\eta = \dfrac{\ln\alpha}{\ln\beta}$.

Par conséquent, tous les $C_{k,l}$, $0 \leqq k \leqq q_0$, $0 \leqq l \leqq q_0$, doivent être égaux à zéro.

Nous aboutissons à une contradiction, parce que les coefficients de la fonction $f(x)$, de par le mode son choix, ne devaient pas, dans leur ensemble être égaux à zéro et le théorème est démontré.

Signalons-en, pour terminer, une conséquence. Un logarithme quelconque de nombre algébrique, pris suivant une base algébrique, doit être un nombre transcendant ou rationnel.

## А. О. ГЕЛЬФОНД. О СЕДЬМОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

### РЕЗЮМЕ

Настоящая работа представляет собой более полное изложение моей заметки помещенной под тем же заглавием в Докладах Академии наук СССР (1934 т. II, № 1, стр, 1). Гильбертом была поставлена проблема трансцендентности чисел вида $\omega^\eta$, где $\omega$ и $\eta$ два алгебраические числа, а $\eta$, кроме того, иррационально. Современное, до моей работы, состояние этой проблемы было приведено в выше указанной заметке.

Пусть $\alpha \neq 0,1$ и $\beta \neq 0,1$ будут алгебраические числа. Допустим, что $\eta = \frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ будет алгебраическим и иррациональным числом. Пусть, далее, числа $\alpha$, $\beta$ и $\eta$ будут корнями уравнений (неприводимых) степеней $p_1, p_2, p_3$ с целыми рациональными коэффициентами. Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{p_1-1}$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p_2-1}$ и $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_{p_3-1}$, числа сопряженные, соответственно, с $\alpha$, $\beta$ и $\eta$. Пусть $c$ будет целое положительное число, и притом такое, что $c\alpha$, $c\beta$ и $c\eta$ будут целыми алгебраическими числами.

Введем теперь ряд констант, которые будут нужны в дальнейшем. Определим константы $\gamma, \lambda_1, \ldots \lambda_5$ равенствами:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma = e^{2\pi}\,\mathrm{Max}\,[3, |\alpha|, \ldots, |\alpha_{p_1-1}|, |\beta|, |\beta_1|, \ldots, |\beta_{p_2-1}|, |\eta|, |\eta_1|, \ldots |\eta_{p_3-1}|]; \\ \lambda_1 = 2 \ln 3\, p_1 p_2 p_3; \quad \lambda_2 = (2 \ln \gamma + 4 \ln c)\, p_1 p_2 p_3; \quad \lambda_3 = 2\, p_1 p_2 p_3; \\ \lambda_4 = \ln [2 \ln \gamma]; \quad \lambda_5 = 2 \ln \gamma. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Вводим в рассмотрение целые, положительные числа $q_1, q_2, \ldots, q_8$, которые будут определяться тем, что для всякого $q > q_i$ должно выполняться соответствующее $\eta$-ое неравенство:

$$\left.\begin{array}{c} \text{при } q \geqq q_1, \quad \ln q > \ln (\gamma + \gamma^2) + 2 \ln c; \quad \text{при } q > q_2, \\ \frac{\ln q}{\ln \ln q} > 4\,(3 \ln 3 + \lambda_4 + \lambda_5); \quad \text{при } q > q_3, \\ \frac{\ln q}{\ln \ln q} > 4\,(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3); \quad \text{при } q \geqq q_4, \ln \ln q > 6\,(2 \ln 6 + \lambda_5); \\ \text{при } q \geqq q_5, \ln \ln q > 12\,(\lambda_1 + \lambda_2 + \gamma_3); \quad \text{при } q \leqq q_6, \\ 2q^{7/3} < \frac{1}{2}\,\frac{q^{5/2}}{\ln \ln q} - (2 \ln 6 + \lambda_5)\,\frac{q^{5/2}}{\ln q \ln \ln q}; \quad \text{при } q \geqq q_7, \\ q^{7/3} > 5\, q^2 \ln (5\, q^2) \ln 2; \quad \text{при } q \geqq q_8, \\ q^{7/3} > 5\,(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\, q^2 \ln q. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Очевидно, что как константы $\gamma, \lambda_1, \ldots, \lambda_5$, так и константы $q_1, q_2, \ldots q_8$ зависят только от алгебраических чисел $\alpha$, $\beta$, $\eta$.

Положим так же

$$\left.\begin{aligned} q_0 &= 1 + \operatorname{Max}\left[3^{s^4}, q_1, \ldots, q_8\right], \\ r_1 &= \left[\frac{q_0^2}{\ln q_0 \ln\ln q_0}\right], \quad r_2 = [\ln^2 \ln q_0]. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Числа $s$ и $t$ будут, в дальнейшем, всегда целыми неотрицательными и переменными.

Рассмотрим теперь функцию

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=q_0} \sum_{l=0}^{l=q_0} C_{k,l}\, \alpha^{kx} \beta^{lx}, \tag{4}$$

где все числа $C_{k,l}$; $k = 0, 1, \ldots, q_0$; $l = 0, 1, \ldots, q_0$, будут целыми и рациональными.

Относительно подобных функций можно доказать три необходимых, в дальнейшем, леммы.

Лемма I. *Каковы бы ни были целые числа* $C_{k,l}$, $|C_{k\,l}| \leqq 3^{q_0^2}$ *функция* (4) *при предположении алгебраичности чисел* $\alpha$, $\beta$ и $\eta$, *обладает тем свойством, что или выполнено неравенство*

$$|f^{(s)}(t)| > e^{-(\lambda_1 q_0^2 + \lambda_2 q_0 t + \lambda_3 s \ln q_0)}, \tag{5}$$

*или* $f^s(t) = 0$.

Доказательство этой леммы основано только на том факте, что

$$f^{(s)}(t) = \ln^{-s}\beta \sum_{k=q0}^{k=q_0} \sum_{l=0}^{l=q_0} C_{k,l}\,(k\eta + l)^s\, \alpha^{kt} \beta^{lt},$$

является, на основании предположения об алгебраичности $\alpha, \beta$ и $\eta$, алгебраическим, с точностью до множителя, числом. Но норма этого алгебраического числа, которое мы делаем целым умножением на $c^{s+2q_0 t}$, должна быть или больше 1 или оно должно быть нулем. Простые подсчеты дают (5) неравенство с константами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, определенными равенством (1), при использовании условия $q_0 > q_1$.

Лемма II. *При условии* $|C_{k,l}| \leqq 3^{q_0^2}$ *целые, в совокупности не равные нулю коэффициенты функции* $f(x)$, *могут быть выбраны так, что одновременно будут выполняться неравенства, в числе* $r_1 r_2$,

$$|f^{(s)}(t)| < e^{-\frac{1}{6}\frac{q_0^2 \ln\ln q_0}{\ln\ln q_0}}, \quad 0 \leqq s \leqq r_1 - 1, \quad 0 \leqq t \leqq r_2 - 1. \tag{6}$$

Доказательство этой леммы строится с помощью принципа Дирихле в пространстве $2 r_1 r_2 \simeq 2\, q_2^{\,0} \frac{\ln\ln q_0}{\ln q_0}$ измерений, на осях которого откладываются числа $Rf^{(s)}(t)$ и $If^{(s)}(t)$. Число точек в этом пространстве с этими координатами

равно $\sim 3^{q_0^3}$, а число измерений его $\sim 2\,q_0^{\,2}\,\frac{\ln\ln q_0}{\ln q_0}$. Все точки умещаются в гиперкубе со стороной $\sim B_0\,e^{d_0 q_0^2}$, где $B_0$ и $d_0$ малые константы. Из этих соображений и следует, непосредственно, лемма II.

Лемма III. *Если* $|C_{k,l}| \leqq 3^{q_0^2}$ *то функция* $f(x) = \sum_{k=0}^{k=q_0} \sum_{l=0}^{l=q_0} C_{k,l}\,\alpha^{kx}\,\beta^{lx}$ *при любом комплексном удовлетворяет неравенству*:

$$|f(x)| < e^{2\ln 3\, q_0^2 + \lambda_5 q_0 |x|} \tag{7}$$

*где* $\lambda_5$ *определена равенствами* (1).

Доказательство получается непосредственной оценкой $f(x)$.

Теперь может быть доказана теорема:

*Если* $\alpha \neq 0,1$ и $\beta \neq 0,1$ *будут алгебраическими числами, то число* $\eta = \frac{\ln\alpha}{\ln\beta}$ *или рационально или трансцендентно.*

Выбираем, с помощью леммы II, функцию $f(x)$. Сравнивая неравенства (6) с неравенством (5), которое выполнено, так как мы делаем предположение об иррациональности и алгебраичности $\eta$, мы приходим к равенствам $f^{(s)}(t) = 0$, $0 \leqq s \leqq r_1 - 1$, $0 \leqq t \leqq r_2 - 1$, так как $q_0 > q_3$. Это дает нам, что функция $f(x)\,[x(x-1)\ldots(x-r_2+1)]^{-r_1}$ будет целой. С помощью принципа максимума мы выводим отсюда неравенство, верное для всякого $x$, $|x| < q_0^{2/3}$,

$$|f(x)| < e^{-\frac{1}{6} q_0^3 \ln\ln q_0}, \tag{8}$$

из которого, в свою очередь при помощи интеграла Коши следует верное для $t \leqq [\sqrt{q_0}]$ неравенство:

$$|f^{(s)}(t)| < e^{-\frac{1}{12} q_0^2 \ln\ln q_0}, \quad 0 \leqq s \leqq r_1 - 1, \quad 0 \leqq t \leqq r_2 - 1. \tag{9}$$

Сравнивая (5) и (9) неравенства мы приходим. так-как $q_0 > q_5$, к условиям $f^{(s)}(t) = 0$, $0 \leqq s \leqq r_1 - 1$, $0 \leqq t \leqq r_2 - 1$. Из существования значительно большего, чем ранее это было установлено, нулей $f(x)$, с помощью аналогичных рассуждений, может быть получено для $0 \leqq s \leqq 5\,q_0^{\,2}$, $t = 0$, неравенство

$$|f^{(s)}(0)| < e^{-q_0^2/3}, \tag{10}$$

Сравнивая опять неравенства (5) и (10), мы получим, что $f^{(s)}(0) = 0$, $0 \geqq s \leqq 5q_0^{\,2}$, так как $q_0 > q_8$.

Итак, мы имеем относительно $C_{k,e}$ $(k = 0, 1, \ldots q_0,\ l = 0, 1, \ldots q_0)$ $(q_0+1)^2$ уравнений, очевидно однородных,

$$f^{(s)}(0) = \sum_{k=0}^{k=q_0} \sum_{l=0}^{l=q_0} C_{k,l}\,(k\ln\alpha + l\ln\beta)^s = 0, \quad 0 \leqq s \leqq (q_0+1)^2 - 1. \tag{11}$$

Детерминантом этой системы будет Вандермондов детерминант. Он отличен от нуля, так как равенство

$$k_1 \ln \alpha + l_1 \ln \beta = k_2 \ln \alpha + l_2 \ln \beta, \quad (k_1 - k_2)^2 + (l_1 - l_2)^2 \neq 0 \qquad (12)$$

невозможно в силу иррациональности, по предположению числа, $\eta = \frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$.

Значит все $C_{k,l} = 0$ и мы пришли к противоречию, так как по способу их выбора это невозможно. Этим наша теорема доказана.

Из нее, между прочим, непосредственно следует, что логарифм алгебраического числа, взятый при алгебраическом основании, трансцендентен или рационален.

# Оглавление — Sommaire


| | стр. |
|---|---|
| В. А. Кистяковский. Вильгельм Оствальд. (Член-корреспондент Академии Наук СССР). Некролог (с портретом) | 431 |
| Г. Г. Аппельрот. О некоторых свойствах действительных непрерывных решений дифференциальных уравнений упрощенной основной формы (с резюме на немецк. яз.) | 443 |
| Р. О. Кузьмин. Об одном классе бесконечных систем линейных уравнений (с резюме на франц. яз.) | 515 |
| И. А. Скопин. О распределении дробных частей системы целых многочленов (с резюме на немецк. яз.) | 547 |
| М. Келдыш и Ф. Франкль. Внешняя задача Неймана для нелинейных эллиптических уравнений с приложением к теории крыла в сжимаемом газе (с 1 фиг. и резюме на немецк. яз.) | 561 |
| А. Г. Самарцев и К. С. Евстропьев. Явления перенапряжения при электролитическом выделении металла на индифферентном электроде (с 12 фиг. и резюме на франц. яз.) | 603 |
| А. Е. Чичибабин и Е. Д. Осетрова. γ-Фенилазо-$\alpha\alpha_1$-диаминопиридин (с резюме на франц. яз.) | 615 |
| *А. О. Гельфонд, О седьмой проблеме Гильберта (с резюме на русск. яз.) | 623 |

| | pag. |
|---|---|
| *V. Kistjakovskij. Wilhelm Ostwald. (Membre correspondant de l'Académie des Sciences de l'URSS). Nécrologe (avec portrait) | 431 |
| *G. Appelrot. Sur quelques propriétés des solutions réelles continues des équations différentielles de la forme fondamentale simplifiée (avec résumé en allemand) | 443 |
| *R. Kuzmin. Sur une classe de systèmes linéaires à une infinité d'inconnues (avec résumé en français) | 515 |
| *I. Skopin. Sur la distribution des parties fractionnaires d'un système de polynômes entiers (avec résumé en allemand) | 547 |
| *M. Keldysch et F. Frankl. Le problème extérieur de Neumann pour les équations non-linéaires elliptiques avec application à la théorie de l'aile dans un gaz compressible (avec 1 fig. et résumé en allemand) | 561 |
| *A. Samarcev et K. Evstropiev. Potentiel de formation et de dégagement des métaux sur une électrode indifférente (avec 12 fig. et résumé en français) | 603 |
| *A. Čičibabin et E. Osetrova. γ-Phénylazo-$\alpha\alpha_1$-diaminopyridine | 615 |
| A. Gelfond. Sur le septième problème de Hilbert (avec résumé en russe) | 623 |


Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала
Le titre marqué d'un astérisque est une traduction du titre original

Цена 3 руб. 50 коп.